

УДК 539.375

М. В. Дудик, Ю. В. Решітник, В. М. Феньків, Я. І. Щепкіна

Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини

ЗОНА ДЕСТРУКЦІЇ В АДГЕЗІЙНОМУ ШАРІ БІЛЯ ВЕРШИНИ МІЖФАЗНОЇ ТРІЩИНИ, ЩО ВИХОДИТЬ З КУТОВОЇ ТОЧКИ ЛАМАНОЇ МЕЖІ ПОДІЛУ

В умовах плоскої деформації досліджено модель маломасштабної зони передруйнування із зоною деструкції, яка розвивається у з'єднувальному шарі кусково-однорідного тіла з вершини міжфазної тріщини, що виходить з куткової точки ламаної межі поділу двох різних однорідних ізотропних пружних матеріалів. Зону передруйнування подано розташованою на межі поділу лінією розриву переміщення, що складається з двох частин. Прилеглу до вершини тріщини зону деструкції змодельовано відрізком розриву нормального і дотичного переміщень, на якому нормальне і дотичне напруження дорівнюють опору з'єднувального матеріалу відриву і зсуву відповідно, іншу частину зони передруйнування – відрізком розриву нормального переміщення, на якому нормальне напруження дорівнює опору відриву. Припускаючи, що довжина зони деструкції значно менша, ніж довжина всієї зони передруйнування, за допомогою методу Вінера – Хопфа знайдено розв'язок задачі про розрахунок параметрів зони деструкції і напружено-деформованого стану в околі вершини тріщини. Виконано числовий аналіз параметрів зони деструкції. Виявлено їх суттєву залежність від пружних параметрів з'єднаних матеріалів, конфігурації навантаження та кута зламу межі поділу середовищ.

Ключові слова: зона передруйнування, зона деструкції, ламана межа поділу, міжфазна тріщина.

В условиях плоской деформации исследована модель маломасштабной зоны предразрушения с зоной деструкции, развивающейся в соединительном слое кусочно-однородного тела из вершины межфазной трещины, выходящей из угловой точки ломаной границы раздела двух различных однородных изотропных упругих материалов. Зона предразрушения представлена расположенной на границе раздела линией разрыва перемещения, состоящей из двух частей. Прилегающая к вершине трещины зона деструкции моделируется отрезком разрыва нормального и касательного перемещений, на котором нормальное и касательное напряжения равны сопротивлению соединительного материала отрыву и сдвигу соответственно. Остальная часть зоны предразрушения моделируется отрезком разрыва нормального перемещения, на котором нормальное напряжение равно сопротивлению отрыву. Принимая, что длина зоны деструкции значительно меньше, чем длина всей зоны предразрушения, с помощью метода Винера – Хопфа найдено решение задачи о расчете параметров зоны деструкции и напруженно-деформированного состояния вблизи вершины трещины. Выполнен числовой анализ параметров зоны деструкции. Выявлена их существенная зависимость от упругих параметров соединенных материалов, конфигурации нагрузки и угла излома границы раздела сред.

Ключевые слова: зона предразрушения, зона деструкции, ломаная граница раздела, межфазная трещина.

The model of the small-scale prefracture zone with the destruction zone, which propagates under the plane strain conditions in the joining layer of the piece-homogenous body from the tip of interfacial crack outcoming from the angular point of broken interface of two different homogeneous isotropic elastic materials was investigated. The prefracture zone is given by located on the interface a rupture line of displacement consisting of two parts. The destruction zone adjoining to the crack tip is simulated by the segment of normal and tangential displacements rupture, on which the normal and tangential stresses are equal to the tensile strength and shear resistance correspondingly. The other part of prefracture zone is modelled by the segment of the normal displacement rupture, on which the normal stress is equal to the tensile strength. Assuming that the length of destruction zone is much smaller than the length of the whole prefracture zone the solution of the problem about the computation of the destruction zone parameters and stress-strain state near the crack tip by the Wiener – Hopf method was found. The numerical analysis of the destruction zone parameters is

executed. Their substantial dependence on the elastic parameters of the joined materials, loading configuration and on the interface angle is revealed.

Key words: prefracture zone, destruction zone, broken interface, interfacial crack.

Вступ. Актуальною проблемою механіки руйнування композитів, зварних і клеєних з'єднань є визначення умов межової рівноваги кусково-однорідного тіла з міжфазною тріщиною. Високий рівень напружень біля вершини тріщини призводить до появи в її околі зони передруйнування, в якій деформація матеріалу має необоротний характер. Одним із шляхів урахування впливу зони передруйнування на межовий стан тіла є використання моделі Леонова – Панасюка [9], яка подає зону поверхнею розриву нормального переміщення із заданим на ній сталим нормальним напруженням, що має смисл опору відриву матеріалу і визначається експериментально як середнє значення напруження по довжині зони. Проте така модель не враховує деякі особливості структури зони. Зокрема, з експериментальних досліджень [6; 7] відомо, що в частині зони передруйнування, безпосередньо прилеглої до вершини тріщини, виникає зона деструкції матеріалу, для якої характерний високий рівень деформацій. Метою роботи є розрахунок розмірів зони деструкції у з'єднувальному матеріалі кусково-однорідного тіла в околі вершини міжфазної тріщини, що виходить з кутової точки ламаної межі поділу двох різних середовищ. В основу розв'язання даної проблеми покладено комплексну модель зони передруйнування [3; 5], яка є розвитком моделі Леонова – Панасюка і приводить до змішаної задачі теорії пружності, яку розв'язують за допомогою методу Вінера – Хопфа.

Постановка задачі. В умовах плоскої деформації розглянемо задачу про розрахунок параметрів області деструкції в частині маломасштабної зони передруйнування у з'єднувальному матеріалі, прилеглої до вершини міжфазної тріщини довжиною L з вільними від навантаження берегами, яка виходить з кутової точки ламаної межі поділу двох однорідних ізотропних пружних середовищ з модулями Юнга E_1, E_2 і коефіцієнтами Пуассона ν_1, ν_2 . Відповідно до комплексної моделі зони передруйнування зобразимо лінією розриву переміщення, що складається з двох частин (рис. 1).

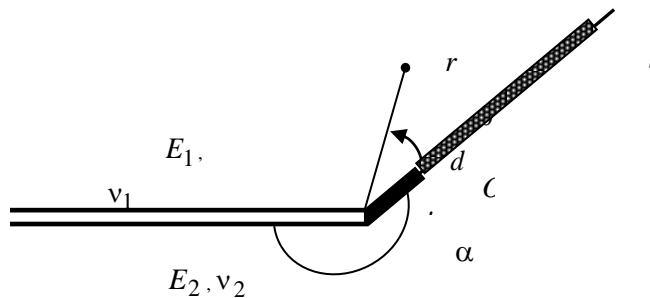


Рис. 1. Розрахункова модель зони передруйнування із зоною деструкції

Прилеглу до вершини тріщини зону деструкції моделюємо відрізком, на якому зазнають розриву нормальне і дотичне переміщення, а нормальне і дотичне напруження дорівнюють опору відриву σ_0 і опору зсуву τ_0 з'єднувального

матеріалу відповідно. Іншу частину зони передруйнування змодельюємо відрізком розриву нормального переміщення, на якому нормальне напруження дорівнює опору відриву.

Оскільки довжину зони деструкції d передбачаємо значно меншою порівняно із довжиною l всієї зони передруйнування, що узгоджується з експериментальними даними [6; 7], то досліджуване тіло будемо розглядати як кусково-однорідну площину з межею поділу у формі прямолінійних сторін кута, з вершини якого вздовж однієї зі сторін поширюється півнескінченна тріщина, уздовж іншої – півнескінченна лінія розриву нормального переміщення зі сталим нормальним напруженням $\sigma_\theta(r,0) = \sigma_0$, яка містить у прилеглій до вершини тріщини відрізок скінченної довжини d , де також зазнає розриву і дотичне переміщення, а дотичне напруження дорівнює $\tau_{r\theta}(r,0) = \tau_0$. Це дозволяє сформулювати умову на нескінченності як вимогу можливості зшивання розшукуваного розв'язку з відомим асимптотичним розв'язком біля вершини тріщини аналогічної задачі про маломасштабну зону передруйнування скінченної довжини без зони деструкції [4]. У результаті приходимо до статичної задачі теорії пружності з крайовими умовами:

$$\theta = -\alpha \cup \theta = 2\pi - \alpha : \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0;$$

$$\theta = 0 : \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0; \theta = 0 : \sigma_\theta = \sigma_0; \quad (1)$$

$$\theta = 0, r < d : \tau_{r\theta} = \tau_0; \theta = 0, r > d : \langle u_r \rangle = 0; \quad (2)$$

$$\theta = 0, r \rightarrow \infty : \tau_{r\theta} = \sigma_0 \left[\tilde{C}_0 + \sum_s \tilde{C}_s \cdot (r/L)^{\lambda'_s} \right] + o(1/r), \quad (3)$$

де $\langle f \rangle$ – стрибок величини f ; \tilde{C}_0, \tilde{C}_s – сталі, які визначають конфігурацією тіла і зовнішнім навантаженням і вважають заданими за умовами задачі; λ'_s – корені характеристичного рівняння аналогічної задачі без зони деструкції ($\text{Re } \lambda'_s > -1$) [4]:

$$D_1(-1 - \lambda'_s) = 0, \quad (4)$$

$$D_1(p) = e(1 + \kappa_2)\Delta_1(p)\Delta_2(p) - (1 + \kappa_1)\Delta_3(p)\Delta_4(p),$$

$$\Delta_1(p) = p^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 p(2\pi - \alpha), \Delta_2(p) = p \sin 2\alpha - \sin 2p\alpha,$$

$$\Delta_3(p) = p^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 p\alpha, \Delta_4(p) = p \sin 2\alpha - \sin 2p(2\pi - \alpha),$$

$$e = \frac{1 + \nu_2}{1 + \nu_1} \cdot \frac{E_1}{E_2}, \kappa_{1(2)} = 3 - 4\nu_{1(2)}.$$

У точці O' відповідно до загальних положень про поведінку напружень біля гострокінцевих концентраторів [11] має місце коренева особливість напружень:

$$\theta = 0, r \rightarrow d + 0 : \tau_{r\theta} \sim \frac{1 + \kappa_1 + e(1 + \kappa_2)}{2(1 + \kappa_1)} \frac{k}{\sqrt{2\pi(r-d)}}, \quad (5)$$

де k – коефіцієнт інтенсивності напружень в кінці лінії розриву OO' , який визначатимемо в ході розв'язання задачі.

Розв'язок сформульованої крайової задачі (1)-(3) шукаємо у вигляді суми розв'язків наступних двох задач. Перша відрізняється від неї тим, що в (1) замість останньої умови і в (2) замість першої умови беремо

$$\theta = 0, r > d : \sigma_\theta = 0; \quad \theta = 0, r < d : \tau_{r\theta} = \tau_0 - \sigma_0 \left[\tilde{C}_0 + \sum_s \tilde{C}_s (r/L)^{\lambda'_s} \right], \quad (6)$$

а на нескінченності напруження спадають як $o(1/r)$. Друга задача – задача, аналогічна вихідній, за $d = 0$, розв'язок якої отримано в [4].

Розв'язання задачі методом Вінера – Хопфа. Застосувавши до рівнянь рівноваги, умови сумісності деформацій, закону Гука і межових умов (1) інтегральне перетворення Мелліна [10] і скориставшись умовами (2) і (6), приходимо до функціонального рівняння Вінера – Хопфа першої задачі у смугі $-\varepsilon_1 < \text{Re } p < \varepsilon_2$ ($\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – достатньо малі додатні числа):

$$\tilde{\Phi}^+(p) + \frac{\tau_0 - \sigma_0 \tilde{C}_0}{p+1} - \sigma_0 \sum_s \frac{\tilde{C}_s (d/L)^{\lambda'_s}}{p+1+\lambda'_s} = -B(1+\kappa_1) \text{tg } p\pi H(p) \tilde{\Phi}^-(p), \quad (7)$$

$$\tilde{\Phi}^+(p) = \int_1^\infty \tau_{r\theta}(\rho d, 0) \rho^p d\rho, \quad \tilde{\Phi}^-(p) = \frac{E_1}{4(1-\nu_1^2)} \int_0^1 \left. \frac{\partial u_r}{\partial r} \right|_{\theta=0} \Big|_{r=\rho d} \rho^p d\rho,$$

$$B = \frac{2}{1+\kappa_1 + e(1+\kappa_2)}, \quad H(p) = \frac{4 \cos p\pi \Delta_1(p) \Delta_3(p)}{B \sin p\pi D_1(p)}.$$

Функція $H(it)$ є додатна парна функція, яка за $t \rightarrow \pm\infty$ прямує до 1, тому індекс функції $H(p)$ по уявній осі дорівнює нулю, до того ж можлива її факторизація за формулою [1]:

$$H(p) = \frac{H^+(p)}{H^-(p)} \quad (\text{Re } p = 0), \quad \exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\ln H(z)}{z-p} dz \right] = \begin{cases} H^+(p), & \text{Re } p < 0, \\ H^-(p), & \text{Re } p > 0. \end{cases}$$

Враховуючи також факторизацію

$$\text{tg } p\pi = \frac{p}{K^+(p)K^-(p)}, \quad K^\pm(p) = \frac{\Gamma(1 \mp p)}{\Gamma(0,5 \mp p)},$$

де $\Gamma(p)$ – гама-функції Ейлера, зобразимо рівняння (7) у вигляді

$$\frac{K^+(p)\tilde{\Phi}^+(p)}{pH^+(p)} + \frac{\tau_0 - \sigma_0 \tilde{C}_0}{p+1} \left[\frac{K^+(p)}{pH^+(p)} + \frac{K^+(-1)}{H^+(-1)} \right] - \sigma_0 \sum_s \frac{\tilde{C}_s (d/L)^{\lambda'_s}}{p+\lambda'_s+1} \left[\frac{K^+(p)}{pH^+(p)} + \frac{K^+(-\lambda'_s-1)}{(\lambda'_s+1)H^+(-\lambda'_s-1)} \right] =$$

$$= - \frac{B(1 + \kappa_1)\tilde{\Phi}^-(p)}{K^-(p)H^-(p)} + \frac{(\tau_0 - \sigma_0\tilde{C}_0)K^+(-1)}{(p+1)H^+(-1)} - \sigma_0 \sum_s \frac{\tilde{C}_s(d/L)^{\lambda'_s}}{p + \lambda'_s + 1} \frac{K^+(-\lambda'_s - 1)}{(\lambda'_s + 1)H^+(-\lambda'_s - 1)} \quad (\text{Re } p = 0). \quad (8)$$

Ліва частина рівняння (8) є аналітична функція у півплощині $\text{Re } p < 0$, а права – у півплощині $\text{Re } p > 0$. Тоді згідно з принципом аналітичного продовження має існувати єдина функція, аналітична у всій комплексній площині і така, що дорівнює лівій і правій частинам цього рівняння у відповідних півплощинах. Оскільки ліва і права частини на нескінченності перетворюються на нуль, то за теоремою Ліувілля єдина аналітична функція тотожно дорівнює нулю у всій комплексній площині. Звідси, прирівнюючи обидві частини рівняння (8) до нуля, отримаємо його точний розв'язок:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}^+(p) &= - \frac{pH^+(p)}{K^+(p)} \left\{ \frac{\tau_0 - \sigma_0\tilde{C}_0}{p+1} \left[\frac{K^+(p)}{pH^+(p)} + \frac{K^+(-1)}{H^+(-1)} \right] - \right. \\ &- \left. \sigma_0 \sum_s \frac{\tilde{C}_s(d/L)^{\lambda'_s}}{p + \lambda'_s + 1} \left[\frac{K^+(p)}{pH^+(p)} + \frac{K^+(-\lambda'_s - 1)}{(\lambda'_s + 1)H^+(-\lambda'_s - 1)} \right] \right\} \quad (\text{Re } p < 0), \\ \tilde{\Phi}^-(p) &= \frac{K^-(p)H^-(p)}{B(1 + \kappa_1)} \left\{ \frac{(\tau_0 - \sigma_0\tilde{C}_0)K^+(-1)}{(p+1)H^+(-1)} - \right. \\ &- \left. \sigma_0 \sum_s \frac{\tilde{C}_s(d/L)^{\lambda'_s} K^+(-\lambda'_s - 1)}{(p + \lambda'_s + 1)(\lambda'_s + 1)H^+(-\lambda'_s - 1)} \right\} \quad (\text{Re } p > 0). \quad (9) \end{aligned}$$

Розрахунок параметрів зони деструкції. Застосувавши до (5) теорему абельова типу [8], знаходимо вираз

$$\tilde{\Phi}^+(p) \sim \frac{1 + \kappa_1 + e(1 + \kappa_2)}{2(1 + \kappa_1)} \frac{k}{\sqrt{-2pd}} \quad (p \rightarrow \infty, \text{Re } p < 0),$$

з іншого боку, з (9) випливає асимптотика

$$\tilde{\Phi}^+(p) \sim - \frac{1}{\sqrt{p}} \left\{ \frac{(\tau_0 - \sigma_0\tilde{C}_0)K^+(-1)}{H^+(-1)} - \sigma_0 \sum_s \frac{\tilde{C}_s(d/L)^{\lambda'_s} K^+(-\lambda'_s - 1)}{(\lambda'_s + 1)H^+(-\lambda'_s - 1)} \right\} \quad (p \rightarrow \infty, \text{Re } p < 0).$$

Порівнюючи ці вирази, отримаємо формулу

$$k = - \frac{2(1 + \kappa_1)\sqrt{2d}}{1 + \kappa_1 + e(1 + \kappa_2)} \left\{ \frac{(\tau_0 - \sigma_0\tilde{C}_0)K^+(-1)}{H^+(-1)} - \sigma_0 \sum_s \frac{\tilde{C}_s(d/L)^{\lambda'_s} K^+(-\lambda'_s - 1)}{(\lambda'_s + 1)H^+(-\lambda'_s - 1)} \right\}.$$

Для забезпечення обмеженості напружень в кінці зони деструкції покладаємо $k = 0$, що приводить до рівняння для визначення довжини зони:

$$\sum_s \frac{\tilde{C}_s(d/L)^{\lambda'_s} K^+(-\lambda'_s - 1)}{(\lambda'_s + 1)H^+(-\lambda'_s - 1)} = \frac{(\tau_0 - \sigma_0\tilde{C}_0)K^+(-1)}{\sigma_0 H^+(-1)}. \quad (10)$$

З визначення функції $\tilde{\Phi}^-(p)$ випливає її зв'язок із зсувним зміщенням берегів зони деструкції у вершині тріщини:

$$\delta u_r(0,0) = \langle u_r(0,0) \rangle = -\frac{4(1-\nu_1^2)d}{E_1} \tilde{\Phi}^-(0).$$

Враховуючи знайдений розв'язок (9) рівняння Вінера – Хопфа (7), отримуємо:

$$\delta u_r(0,0) = -\frac{4(1-\nu_1^2)}{E_1} \sigma_0 d \frac{1+\kappa_1 + e(1+\kappa_2)}{2(1+\kappa_1)\sqrt{\pi H(0)}} \sum_s \frac{\tilde{C}_s(d/L)^{\lambda'_s} \lambda'_s K^+(-\lambda'_s - 1)}{(\lambda'_s + 1)^2 H^+(-\lambda'_s - 1)}. \quad (11)$$

Ця величина разом з визначенням у [4] відривним розкриттям зони передруйнування $\delta u_n(0,0)$ дозволяє розрахувати повне розкриття тріщини у її вершині

$$\delta = \sqrt{(\delta u_n(0,0))^2 + (\delta u_r(0,0))^2},$$

яким можна скористатися для визначення межового навантаження за критерієм критичного розкриття тріщини [1].

Аналіз числових результатів. Числові розрахунки параметрів зони деструкції потребують задання зовнішнього навантаження. З цією метою врахуємо, що локальне поле напружень біля вершини тріщини у кутовій точці межі поділу за відсутності зони передруйнування можна описати асимптотичним розв'язком відповідної однорідної крайової задачі теорії пружності, який має вигляд [4]

$$\sigma_{ik}(r, \theta) = \sum_i C_i F(\lambda_i, \theta) r^{\lambda_i}, \quad (12)$$

де $F(\lambda_i, \theta)$ – відомі функції; λ_i – показники сингулярності напружень ($-1 < \text{Re } p < 0$), які слугують коренями характеристичного рівняння

$$D(\lambda) = 0, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} D(\lambda) = & -(1+\kappa_1)^2 t_1 - 4(1+\kappa_1)(e-1)t_1 t_2 - e^2(1+\kappa_2)^2 t_3 + \\ & + 4(e-1)^2 t_1 t_3 + 4e(1+\kappa_2)(e-1)t_3 t_4 + 2e(1+\kappa_2)(1+\kappa_1)t_5, \\ t_1 = & (\lambda+1)^2 \sin^2 \alpha - \sin^2(\lambda+1)\alpha, \quad t_2 = \sin^2(\lambda+1)(2\pi-\alpha), \\ t_3 = & (\lambda+1)^2 \sin^2 \alpha - \sin^2(\lambda+1)(2\pi-\alpha), \quad t_4 = \sin^2(\lambda+1)\alpha, \\ t_5 = & t_1 + \sin(\lambda+1)\alpha \sin 2\lambda\pi \cos(\lambda+1)(2\pi-\alpha); \end{aligned}$$

C_i – пов'язані з коефіцієнтами інтенсивності напружень сталі, їх визначають конфігурацією тіла і прикладеним навантаженням і вважають відомими з розв'язку тієї чи іншої зовнішньої задачі (див., наприклад [2]). При цьому врахуємо, що залежно від пружних параметрів з'єднаних матеріалів і кута зламу межі поділу рівняння (13) може мати два чи три дійсні показники сингулярності λ_i , $i = 1 \div 3$, або ж два комплексно спряжених $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$ і один чи жодного дійсного показника λ_3 , які, за визначенням показників сингулярності, задовольняють умови $-1 < \text{Re } \lambda_i < 0$. Тоді:

а) якщо характеристичне рівняння (13) має 2 або 3 дійсні корені λ_i ($-1 < \lambda_i < 0$), то величину навантаження і його конфігурацію задаватимемо

безрозмірними параметрами $\sigma = \frac{C_1 L^{\lambda_1}}{\sigma_0}$ і $n_i = \frac{C_i L^{\lambda_i}}{C_1 L^{\lambda_1}}$;

б) якщо рівняння (13) має 2 комплексно спряжені корені $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = \lambda_r + i\lambda_m$ у смугі $-1 < \text{Re } \lambda_i < 0$, так що $C_1 = \bar{C}_2 = \frac{K}{\sqrt{2\pi} L^{i\lambda_m}}$, де $K = K_1 + iK_2 = |K|e^{i\psi}$ – комплексний коефіцієнт інтенсивності напружень (ψ – фазовий кут навантаження), а також один або жодного дійсного кореня λ_3 , то використовуватимемо аналогічні параметри $\sigma = \frac{|K|L^{\lambda_r}}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}$, $\psi = \text{arctg} n$, $n = \frac{K_2}{K_1}$, $n_3 = \frac{\sqrt{2\pi}C_3 L^{\lambda_3}}{|K| L^{\lambda_r}}$.

Сталі \tilde{C}_0, \tilde{C}_s , що входять в рівняння (10)-(11), визначатимемо за формулами $\tilde{C}_0 = \frac{2T''(-1)}{D_1''(-1)}$ та

$$\tilde{C}_s = \sigma \frac{2T(-1-\lambda'_s)}{D_1'(-1-\lambda'_s)N(\lambda'_s)} \sum_i n_i F(\lambda_i)N(\lambda_i)x^{\lambda_i-\lambda'_s} m(\lambda_i, \lambda'_s),$$

якщо λ_i дійсні, або

$$\tilde{C}_s = \sigma \frac{2T(-1-\lambda'_s)}{D_1'(-1-\lambda'_s)N(\lambda'_s)} x^{-\lambda'_s} \left\{ 2 \text{Re} \left[F(\lambda_1)N(\lambda_1)m(\lambda_1, \lambda'_s)x^{\lambda_1} e^{i\psi} \right] + n_3 F(\lambda_3)N(\lambda_3)m(\lambda_3, \lambda'_s)x^{\lambda_3} \right\},$$

якщо корені λ_1, λ_2 комплексно спряжені. Тут $x = l/L$ – відносна довжина всієї зони передруйнування, яку розраховують згідно з [4]; штрихи при функціях $T(p)$ і $D_1(p)$ позначають похідні по їх аргументу;

$$N(\lambda) = \frac{K^+(-\lambda-1)}{(\lambda+1)G^+(-\lambda-1)}, \quad G^+(p) = \exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\ln G(z)}{z-p} dz \right] \quad (\text{Re } p < 0),$$

$$G(p) = \frac{2(e+\kappa_1)(1+\epsilon\kappa_2)D_1(p)}{(e+\kappa_1+1+\epsilon\kappa_2)D(-1-p)} \frac{\cos p\pi}{\sin p\pi}, \quad m(\lambda_i, \lambda'_s) = \frac{\lambda_i}{\lambda'_s(\lambda'_s-\lambda_i)},$$

$$T(p) = e(1+\kappa_2)\Delta_1(p)\Delta_5(p) - (1+\kappa_1)\Delta_3(p)\Delta_6(p) - 2(1-e)\Delta_1(p)\Delta_3(p),$$

$$\Delta_5(p) = p^2 \sin^2 \alpha + \sin^2 p\alpha, \quad \Delta_6(p) = p \sin^2 \alpha + \sin^2 p(2\pi - \alpha).$$

На рис. 2–4 зображено залежність відносних довжин всієї зони передруйнування $x = l/L$ (суцільні лінії), зони деструкції $y = d/L$ (штриховані лінії) та нормованого розкриття тріщини $\delta' = \frac{\delta}{L} \frac{E_1}{4(1-\nu_1^2)\sigma_0}$ (пунктирні лінії) від параметрів досліджуваного кусково-однорідного тіла і навантаження. В усіх розрахунках покладено $\nu_1 = \nu_2 = 0,3, n_3 = 0$.

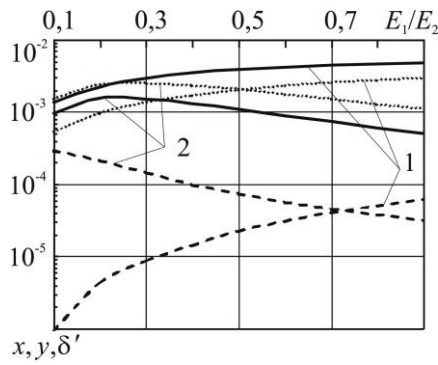


Рис. 2. Залежність відносних довжин всієї зони передруйнування x і зони деструкції y та нормованого розкриття тріщини δ' від відношення модулів Юнга з'єднаних матеріалів для $\sigma=0,2$:
 1 – випадок дійсних показників сингулярності ($\alpha=50^\circ, n_2=1$); 2 – випадок комплексних показників сингулярності ($\alpha=210^\circ, n=1$)

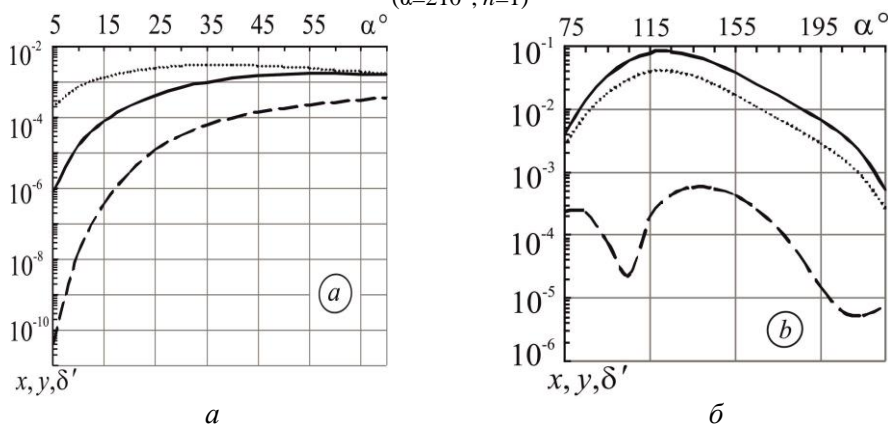


Рис. 3. Залежність відносних довжин всієї зони передруйнування x і зони деструкції y та нормованого розкриття тріщини δ' від кута зламу межі поділу матеріалів для $E_1/E_2=0,25, \sigma=0,2$:
 а – випадок дійсних показників сингулярності ($n_2=1$);
 б – випадок комплексних показників сингулярності ($n=1$)

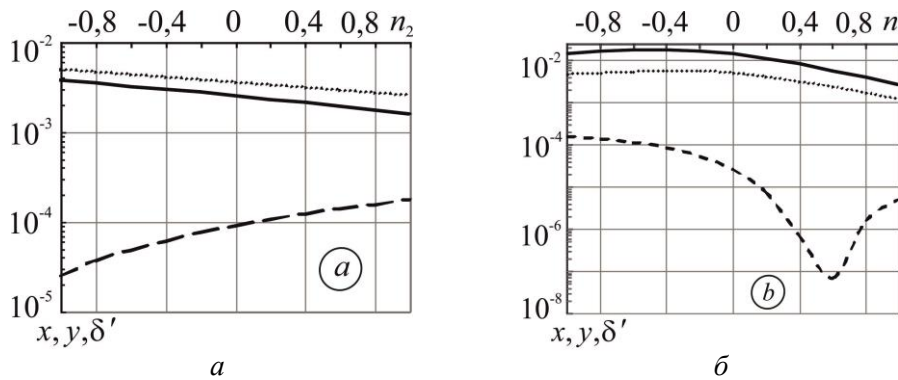


Рис. 4. Залежність відносних довжин всієї зони передруйнування x і зони деструкції y та нормованого розкриття тріщини δ' від конфігурації навантаження для $E_1/E_2=0,25, \sigma=0,2$:
 а – випадок дійсних показників сингулярності ($\alpha=50^\circ$);
 б – випадок комплексних показників сингулярності ($\alpha=210^\circ$)

Згідно з отриманими результатами довжина зони деструкції відповідно до експериментів [6; 7] і прийнятих припущень виявляється більш ніж на один порядок меншою порівняно з довжиною всієї зони передруйнування. Наведені графіки демонструють також суттєву кореляцію між розмірами всієї зони передруйнування і повним розкриттям тріщини, що пов'язано із значно більшим внеском у розкриття тріщини відривного зміщення берегів у вершині $\delta u_n(0,0)$ порівняно із зсувним зміщенням $\delta u_r(0,0)$, спричиненим утворенням зони деструкції. Водночас, характер залежностей розмірів всієї зони передруйнування і зони деструкції від параметрів композитного тіла і зовнішнього навантаження суттєво відрізняється. Особливо це помітно для їх залежностей від кутів зламу межі поділу (рис. 3,б) і конфігурації навантаження, заданого значеннями n_2 і n (рис. 4). Це пов'язано з тим, що розміри всієї зони передруйнування у з'єднувальному матеріалі визначаються відривними нормальними зусиллями на межі поділу [4], а розміри зони деструкції – тангенціальними. Тому при кутах зламу або конфігураціях навантаження, для яких нормальне напруження на межі поділу максимальне, відповідно й довжина зони передруйнування буде максимальною, на відміну від довжини зони деструкції із зсувним характером деформацій. Навпаки, коли дотична складова напруження на межі поділу досягає максимуму, довжина зони деструкції зростає настільки, що можливе порушення вихідного припущення розглянутої моделі про малість її розмірів порівняно з розмірами всієї зони передруйнування (рис. 3,а, за значенням $\alpha \geq 70^\circ$).

Висновки. Розвинуто модель маломасштабної зони передруйнування, що утворюється у з'єднувальному матеріалі кусково-однорідного тіла в кінці вершини міжфазної тріщини, яка виходить з кутової точки ламаної межі поділу двох різних однорідних ізотропних пружних середовищ. Особливістю моделі є врахування наявності у прилеглий до вершини тріщини області деструкції матеріалу з високим рівнем деформацій. В умовах плоскої деформації в межах комплексної моделі Леонова – Панасюка зону передруйнування зображено лінією розриву нормального переміщення, яка містить відрізок розриву дотичного переміщення, що моделює зону деструкції. Задачу про розрахунок параметрів зони деструкції зведено до функціонального рівняння Вінера – Хопфа, точний розв'язок якого знайдено засобами теорії функцій комплексної змінної. Отримано рівняння для визначення довжини зони деструкції і розкриття тріщини в її вершині. Виконано числовий аналіз параметрів зони деструкції, який виявив суттєву залежність її розмірів та розкриття тріщини від зовнішнього навантаження, пружних характеристик і кута зламу межі поділу з'єднаних матеріалів.

Бібліографічні посилання

1. Гахов, Ф. Д. Краевые задачи [Текст] / Ф. Д. Гахов. – М.: Наука, 1977. – 640с.
2. Дудик, М. В. Дослідження напружено-деформованого стану біля кутової точки межі поділу матеріалів, з якої виходить міжфазна тріщина [Текст] / М. В. Дудик // Вісн. Терноп. нац. техн. ун-ту. – 2014. – №3 (75) – С.87 – 98.
3. Дудик, М. В. Комплексна модель зони передруйнування біля вершини міжфазної тріщини у пружно-пластичному тілі при зсуві [Текст] / М. В. Дудик // Вісн. Дніпр. ун-ту. Сер.:Механіка. – 2014.– Т. 2. – №7. – Вип.18. – С.87 – 98.
4. Дудик, М. В. Розвиток зони передруйнування від міжфазної тріщини у кутовій точці межі розділу двох пружних середовищ [Текст] / М.В. Дудик, Ю.В. Діхтяренко // Математичні методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – Т.54 – №2. – С.103 – 114.

5. Каминский, А. А. О страгивании трещины, расположенной на границе раздела упругих сред [Текст] / А.А. Каминский, Л.А. Кипнис // Доп. НАН України. – 2011. – №1. – С.38 – 43.

6. Каминский, А. А. Экспериментальное исследование распределения пластических деформаций в окрестности вершины трещины при статическом нагружении [Текст] / А. А. Каминский, Г. И. Усикова, Е. А. Дмитриева // Прикл. механика. – 1994. – Т. 30 – № 11.– С. 69–75.

7. Когут, І. С. Визначення розмірів зони передруйнування квазікрихких надрізаних зразків [Текст] / І. С. Когут, Г. І. Калита // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2008. – Т. 44 – № 1.– С. 84–87.

8. Нобл, Б. Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных [Текст] / Б. Нобл. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 279с.

9. Панасюк, В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами / В. В. Панасюк. – К.: Наук. думка, 1968. – 246 с.

10. Уфлянд, Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости [Текст] / Я. С. Уфлянд. – Л.: Наука, 1967. – 402 с.

11. Черепанов, Г.П. Механика хрупкого разрушения [Текст] / Г. П. Черепанов. – М.: Наука, 1974. – 640 с.

Надійшла до редколегії 12.02.2017

УДК 532.516

**С.В. Тарасов¹, Д. А. Редчиц¹, Е. Р. Абрамовский¹,
В. П. Гладенко², С. В. Моисеенко³, А. С. Тарасов¹**

¹*Институт транспортных систем и технологий НАН Украины, г. Днепр*

²*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара*

³*Херсонский национальный технический университет*

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИЗУЧЕНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ОСОБЕННОСТЕЙ ТУРБУЛЕНТНОГО ОБТЕКАНИЯ J-ЛОПАСТИ РОТОРА ДАРЬЕ

В работе проведено экспериментальное и численное изучение физических особенностей турбулентного обтекания J-лопасти ротора Дарье вертикально-осевой ветроэнергетической установки для произвольного угла атаки. Экспериментальные исследования модели лопасти проведены в аэродинамической трубе Т-5, расположенной в лаборатории кафедры аэрогидромеханики и энергомассопереноса Днепропетровского национального университета имени Олеся Гончара. Результаты экспериментов представлены в виде графиков, отражающих зависимости аэродинамических характеристик J-профиля от угла атаки. Численное моделирование выполнено на базе разработанного специализированного CFD пакета. Для моделирования турбулентности использованы два подхода. Первый, основанный на моделировании на базе осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса (URANS) с использованием дифференциальной однопараметрической модели Spalart-Allmaras, адаптированной к тензору скоростей деформаций (SALSA), а второй – гибридный подход, основанный на моделировании отсоединенных вихрей с задержкой (DDES). Выделены этапы зарождения, развития и срыва вихрей при обтекании J-профиля лопасти ротора Дарье. Рассчитаны значения основных аэродинамических характеристик для произвольных углов атаки. Существенные нестационарные явления проявляются при больших углах атаки профиля. Наблюдается широкий разброс по значениям аэродинамических характеристик для

© Тарасов С.В., Редчиц Д. А., Абрамовский Е. Р.,
Гладенко В. П., Моисеенко С. В., Тарасов А. С., 2017