

О. Ю. Книш, В. В. Лобода

*Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара***ТРИЩИНА В АДГЕЗИЙНОМУ ПРОШАРКУ МІЖ ДВОМА П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИМИ МАТЕРІАЛАМИ**

Розглянуто задачу визначення напружено-деформованого стану в околі тріщини пружно-пластичного прошарку між двома п'єзоелектричними матеріалами під дією віддаленого механічного навантаження, перпендикулярного до положення прошарку. Числово знайдено розподіл нормальних напружень на продовженні тріщини. Шляхом подальшого введення зони передруйнування невідомої довжини зі знайденими напруженнями на їх берегах поставлену пружно-пластичну задачу зведено до задачі лінійної механіки руйнування. З аналітичного розв'язку цієї задачі знайдено довжину зон перед руйнування і величину розкриття тріщини вздовж цих зон. З цього ж розв'язку знайдено розподіл нормальних напружень поза її межами. Окремо знайдено величину розкриття тріщини у вершині початкової тріщини. Величину розкриття тріщини у вершині початкової тріщини може бути використано в деформаційному критерії руйнування для перевірки умови досягнення граничного стану рівноваги. Викладений підхід, пов'язаний зі скінченно-елементним аналізом початкової задачі, може бути використаний для побудови апроксимаційної функції для напружень в зоні передруйнування, яка залежить від механічних і геометричних властивостей композита. У подальшому вищезгадані результати підходу можуть застосовуватися в аналітичному аналізі без звернення до методу скінченних елементів.

**Ключові слова:** тріщина, прошарок, п'єзоелектричний матеріал, метод скінченних елементів, аналітичне дослідження.

Рассмотрена задача об определении напряженно-деформированного состояния в окрестности трещины упруго-пластической прослойки между двумя пьезоэлектрическими материалами под действием удаленной механической нагрузки. Численно найдено распределение нормальных напряжений на продолжении трещины. Путем дальнейшего введения зоны предразрушения неизвестной длины с найденными напряжениями на их берегах поставленная упруго-пластическая задача сведена к задаче линейной механики разрушения. Из аналитического решения этой задачи найдены длина зон предразрушения и величина раскрытия трещины вдоль этих зон. Из этого же решения найдено распределение нормальных напряжений вне их границ. Отдельно найдена величина раскрытия в начальной вершине трещины. Величина раскрытия трещины в начальной вершине может быть использована в деформационном критерии разрушения для проверки условия достижения граничного состояния равновесия. Изложенный подход, связанный с конечно-элементным анализом начальной задачи, может быть использован для построения аппроксимационной функции для напряжений в зоне предразрушения, которая зависит от механических и геометрических свойств композита. В дальнейшем вышеупомянутые результаты подхода могут быть использованы в аналитическом анализе без непосредственного обращения к методу конечных элементов.

**Ключевые слова:** трещина, прослойка, пьезоэлектрический материал, метод конечных элементов, аналитическое исследование.

A problem concerning definition of stress-strain state of the crack neighborhood placed in the elastic-plastic layer between piezoelectric substrates is considered under the loading applied at infinity. The distribution of normal stress on the crack continuation is found numerically. The problem is reduced to the linear fracture mechanic problem by considering of cohesive zones with known normal stress distribution. The length of cohesive zone, crack opening along the cohesive zone and the normal stress distribution of on the cohesive zone continuation are found analytically. The value of the crack opening at its initial tip is found and can be used in deformation fracture criterion for boundary equilibrium condition verification. Mentioned method, which is related to finite element analysis of the

primary problem, can be used for finding of stress approximation function in cohesive zones that depends on mechanical and geometrical characteristics of composite. In the future, mentioned method results can be used in analytical approaches without finite element method usage.

**Key words:** crack, layer, piezoelectric material, finite element method, analytical investigation.

Вступ. Поряд з енергетичними та силовими критеріями, досить поширені деформаційні критерії руйнування. Складниками перевірки за цими критеріями є визначення характерних деформацій або переміщень в околі вершини тріщини та порівняння їх із критичними. Якщо деформації або переміщення досягають своїх критичних значень, то починається розвиток тріщини.

Ефективність застосування деформаційних критеріїв ґрунтується на можливості експериментальним шляхом точно визначити деформації та переміщення в околі вершини тріщини і таким чином для конкретних матеріалів одержати інформацію про критичні значення вказаних величин. Найбільш поширеним із цієї групи критеріїв можна вважати критерій Леонова–Панасюка–Дагдейла [2;4;5], розвинений у процесі дослідження плоского напруженого стану тонкої пластини з тріщиною. Відомо, що в цьому випадку на продовженнях тріщини утворюються тонкі зони пластичності і, отже, фактично задача стає пружно-пластичною. Але метод, запропонований у роботах [1–3], дозволяє звести пружно-пластичну задачу до задачі лінійної механіки руйнування з невідомою довжиною зони ослаблених міжчастинних зв'язків (передруйнування), якою моделюється зона пластичності.

Метод стосовно тріщини в адгезійному прошарку між двома ізотропними матеріалами набув розвитку в роботах [1;7]. У даній роботі зроблена спроба удосконалити деформаційний критерій руйнування для тріщини у пружно-пластичного прошарку між двома п'єзоелектричними півплощинами, що ґрунтується на числово знайденому розподілі нормального напруження на продовженні тріщини.

**Постановка задачі.** Розглянемо плоску деформацію нескінченного тіла з двох однакових п'єзоелектричних півпросторів, з'єднаних тонким пружно-пластичним прошарком товщини  $h$ . Вважатимемо, що вздовж прошарку розташована тріщина довжиною  $2l_0$ , паралельна до його меж і рівновіддалена від них, а на нескінченності діють рівномірно розподілені нормальні напруження  $\sigma_{yy} = \sigma^\infty$  (рис. 1).

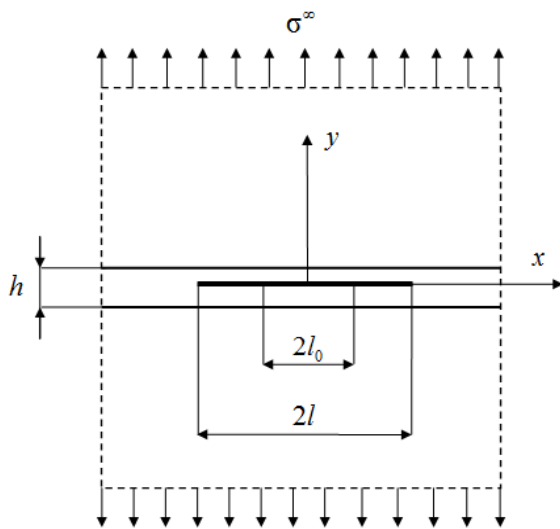


Рис. 1. Тріщина в прошарку між двома п'єзоматеріалами

Електромеханічні властивості п'єзоелектричних півпросторів визначатимемо пружними  $c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{33}, c_{44}$ , п'єзоелектричними  $e_{31}, e_{33}, e_{15}$  і діелектричними  $\epsilon_{11}, \epsilon_{33}$  сталими.

Матеріал прошарку беремо ідеально пружно-пластичним, що задовольняє умову плинності Мізеса та визначається межею плинності  $\sigma_T$ , відповідними значеннями коефіцієнта Пуассона  $\nu$  і модуля пружності  $E$ .

Необхідно знайти величину розкриття тріщини вздовж зони передруйнування  $v(x)$ ,  $|x| \leq l$  і розподіл нормальних напружень  $\sigma_{yy}(x)$ ,  $|x| \geq l$  поза її межами ( $l - l_0$  - довжина зони передруйнування), а також визначити  $v(l_0)$ .

Як правило, матеріал прошарку м'якший порівняно з матеріалами компонентів, які він з'єднує. Тому можемо припустити, що саме в ньому на продовженні тріщини виникають зони послаблення зв'язків частинок середовища (зони передруйнування) та розвиваються пластичні деформації. Застосовуючи ідею Леонова-Панасюка-Дагдейла [2;4;5], моделюємо на продовженні тріщини  $|x| \in (l_0, l)$  зони передруйнування, на берегах яких задаємо нормальне напруження  $\sigma_{yy}^{\pm} = \sigma(x)$ , що протидіє розкриттю тріщини. Ця функція  $\sigma(x)$  не є константа і поки що вважаємо її невідомою. Функцію  $\sigma(x)$  визначаємо експериментально або числово. Зазвичай товщина прошарку набагато менша від довжини тріщини, тому нею можемо знехтувати. Тоді межові умови на лінії  $y = 0$  набувають такого вигляду (рис. 2):

$$\sigma_{yy}(x, 0) = q(x) = \begin{cases} \sigma(x), & l_0 \leq |x| \leq l \\ 0, & |x| \leq l_0 \end{cases}, \quad (1)$$

$$\tau_{xy}(x, 0) = 0, \quad |x| \leq l,$$

$$[u] = 0, \quad [v] = 0, \quad [\sigma_{yy}] = 0, \quad [\tau_{xy}] = 0, \quad |x| > l. \quad (2)$$

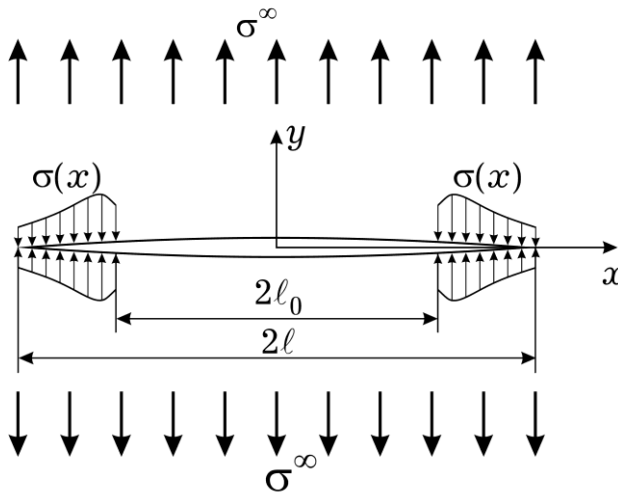


Рис. 2. Зведена задача (без прошарку)

Квадратними дужками в (2) позначено стрибок відповідної функції через вісь  $x$ . Межові умови на нескінченності запишемо так:

$$\sigma_{yy} \Big|_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} = \sigma^\infty, \quad \tau_{xy} \Big|_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} = 0. \quad (3)$$

Позбавляючись від напруження на нескінченності, отримаємо напружений стан на берегах тріщини, який можна визначити такими межовими умовами:

$$\sigma_{yy}(x,0) = p(x) = q(x) - \sigma^\infty = \begin{cases} \sigma(x) - \sigma^\infty, & l_0 \leq |x| \leq l \\ -\sigma^\infty, & |x| \leq l_0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\tau_{xy}(x,0) = 0, \quad |x| \leq l.$$

Таким чином, одержали задачу лінійної механіки руйнування для тріщини  $x \in (-l, l)$  в однорідному ізотропному матеріалі, на берегах якої діють невідомі напруження  $\sigma_{yy}^\pm = p(x)$ . При цьому положення точки  $x = \pm l$  вважаємо невідомим, відтак його потрібно визначити.

**Отримання загального аналітичного розв'язання.** Для п'єзоелектричного матеріалу, що перебуває під дією лише нормального напруження, вирази для напружень та похідних від стрибків переміщень на лінії  $y=0$  згідно з [6;7] запишемо в такому вигляді:

$$\sigma_{yy}(x,0) = g \{F^+(x) + F^-(x)\}, \quad (5)$$

$$i[v'(x,0)] = F^+(x) - F^-(x), \quad (6)$$

де  $g$  – відповідна стала п'єзоелектричного матеріалу, а  $F(z)$  – функція, аналітична у всій площині, за винятком області тріщини.

Застосовуючи співвідношення (5) та задовольняючи межову умову (4), отримаємо задачу лінійного спряження

$$F^+(x) + F^-(x) = \frac{1}{g} p(x), \quad x \in (-l, l) \quad (7)$$

з межовою умовою на нескінченності

$$F(z) \Big|_{z \rightarrow \infty} = 0. \quad (8)$$

Згідно з [3] розв'язок задачі (7), (8) можемо записати у вигляді

$$F(z) = \frac{1}{2\pi g i W(z)} \int_{-l}^l \frac{p(t)W^+(t)}{t-z} dt, \quad (9)$$

де  $W(z) = \sqrt{z^2 - l^2}$ .

Враховуючи, що  $F^+(x) = F^-(x) = F(x)$  для значень  $x \notin (-l, l)$ , з рівняння (5) отримаємо таке співвідношення для визначення напружень на лінії  $y=0$ :

$$\sigma_{yy}(x,0) = \frac{1}{\pi i W(x)} \int_{-l}^l \frac{p(t)W^+(t)}{t-x} dt, \quad x \notin (-l, l). \quad (10)$$

Для подальшого інтегрування виразу (10) апроксимуємо функцію  $\sigma(x)$  на проміжку  $[l_0, l]$ . Для цього графік функції зобразимо кусково-сталою функцією

$$\sigma(x) = \sigma_i, \quad x \in [c_{i-1}, c_i], \quad (11)$$

де  $\sigma_i = \sigma(c_i - \Delta/2)$ ,  $c_i = c_0 + i\Delta$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,

$$\Delta = \frac{l - l_0}{n}, \quad c_0 = l_0, \quad c_n = l.$$

Обчисливши інтеграл у співвідношенні (10), отримаємо вираз для визначення цього напруження. Оскільки згідно з вибраною моделлю напруження у новій вершині  $x = \pm l$  мають бути обмежені, то коефіцієнт інтенсивності напружень у цій точці повинен дорівнювати нулеві. Задовольняючи цю умову, отримуємо

$$\sum_{i=1}^n \sigma_i \left[ \arcsin \frac{c_{i-1}}{l} - \arcsin \frac{c_i}{l} \right] = -\frac{\pi \sigma^\infty}{2}. \quad (12)$$

Співвідношення (12) – це рівняння для визначення довжини зони передруйнування тріщини  $l - l_0$ , яке, як правило, розв’язують числово.

Враховуючи (12), одержимо остаточну формулу для визначення напружень для  $|x| \geq l$ :

$$\sigma_{yy}(x, 0) = \sigma^\infty + \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n \sigma_i \left[ \left( \arcsin \frac{l^2 - xc_i}{l(x - c_i)} - \arcsin \frac{l^2 + xc_i}{l(x + c_i)} \right) - \left( \arcsin \frac{l^2 - xc_{i-1}}{l(x - c_{i-1})} - \arcsin \frac{l^2 + xc_{i-1}}{l(x + c_{i-1})} \right) \right], \quad |x| \geq l. \quad (13)$$

Тепер визначимо стрибок переміщень у початковій вершині тріщини  $x = l_0$ . Для цього вираз із співвідношення (7) для  $F^-(x)$  підставимо в (6). Тоді, використовуючи рівність (9) для визначення  $F^+(x)$  та обчислюючи інтеграли, для стрибка переміщень отримаємо такий вираз:

$$[v(x, 0)] = \frac{1}{2\pi g} \sum_{i=1}^n \sigma_i \{ (x - c_{i-1})\Gamma(l, c_{i-1}, x) - (x + c_{i-1})\Gamma(l, -c_{i-1}, x) - (x - c_i)\Gamma(l, c_i, x) + (x + c_i)\Gamma(l, -c_i, x) \}, \quad |x| \leq l, \quad (14)$$

де  $\Gamma(l, x, \xi) = \ln \frac{l^2 - x\xi - \sqrt{(l^2 - x^2)(l^2 - \xi^2)}}{l^2 - x\xi + \sqrt{(l^2 - x^2)(l^2 - \xi^2)}}.$

Визначимо розкриття тріщини у початковій вершині  $x = l_0$ , скориставшись (14), за формулою

$$\delta = [v(l_0, 0)]. \quad (15)$$

**Числове моделювання.** Числове моделювання задачі, яке необхідне для знаходження розподілу напруження на продовженні тріщини, виконано за допомогою

методу скінченних елементів. Зазначимо, що у випадку числового моделювання було обрано скінченні розміри п'єзоелектричних матриць і прошарку. При цьому вказані розміри вибрано набагато більшими, ніж довжина тріщини, а саме  $H_1 = H_2 = 5 (м)$ ,  $l_0 = 1 (м)$ ,  $h = 0.2 (м)$  (рис. 3).

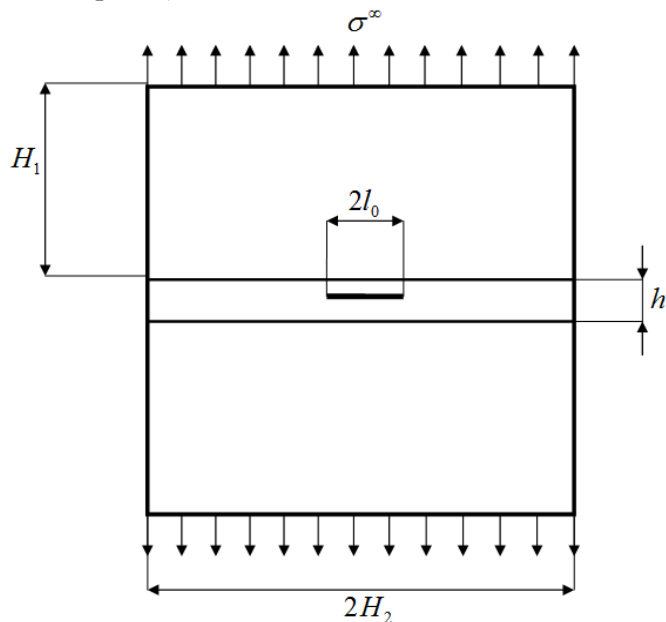


Рис. 3. Числова модель

Механічні характеристики прошарку вибрано у такий спосіб: модуль пружності  $3 \cdot 10^{10} (Па)$ , коефіцієнт Пуассона 0,35, межа плинності  $4,5 \cdot 10^6 (Па)$ , характеристики п'єзоелектричного матеріалу наведено в таблиці.

Пружні ( $\times 10^{10} Па$ )					П'єзоелектричні ( $Кл / м^2$ )			Діелектричні ( $\times 8.85 \cdot 10^{-12} \Phi / м$ )	
$c_{11}$	$c_{12}$	$c_{13}$	$c_{33}$	$c_{44}$	$e_{31}$	$e_{33}$	$e_{15}$	$\epsilon_{11}$	$\epsilon_{33}$
13,9	7,78	7,43	11,5	2,56	-5,2	15,1	12,7	730	635

Для таких матеріальних констант стала  $g = 2,16106 \cdot 10^{10} (Па)$ .

Скінченно-елементну сітку побудовано з деякими особливостями. При наближенні до прошарку, а також до вершин тріщини відбувається її згущення, а також збільшення кількості самих скінченних елементів. Лінійні розміри скінченних елементів біля тріщини складають 1/200 довжини тріщини. Скінченні елементи однакові вздовж всього прошарку, а по віддаленні від нього значно збільшуються. Це зумовлено тим, що області, значно віддалені від прошарку, нас практично не цікавлять, а градієнт електромеханічних величин в них є незначний.

Величину навантаження  $\sigma^\infty$  вибрано у діапазоні від  $1 \cdot 10^6 (Па)$  до  $1 \cdot 10^7 (Па)$ . Для кожного значення  $\sigma^\infty$  здійснено відповідний розрахунок.

**Порівняння числового і аналітичного розв'язку.** Нижче наведено динаміку зміни розподілу  $\sigma_{yy}(x)$  на продовженні тріщини для числового розв'язання залежно від прикладеного навантаження  $\sigma^\infty$  (рис.4).

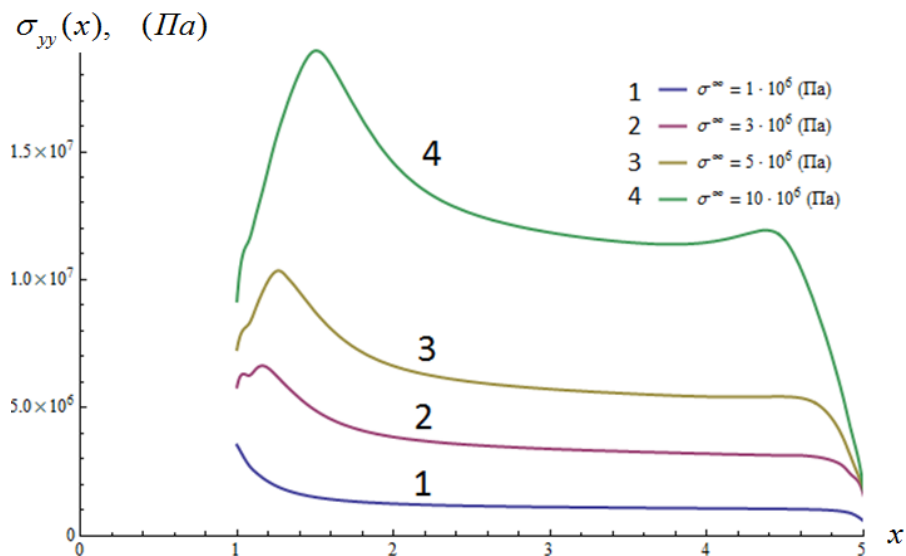


Рис. 4. Динаміка зміни  $\sigma_{yy}(x)$  залежно від навантаження  $\sigma^\infty$

Як бачимо, переходячи від пружності до пластичності, можемо вказати на деякі особливості, що виникають навколо вершини тріщини. Характерним є те, що максимальне значення напружень  $\sigma_{yy}$  спостерігається не біля вершини тріщини (як у пружному випадку), а на деякій відстані від неї. До того ж функція  $\sigma_{yy}(x)$  не є монотонна, а має точки перегинів. Як і очікувалось, у разі віддалення від вершини тріщини напруження  $\sigma_{yy}$  прямують до значення  $\sigma^\infty$ . Виходячи з того, що моделюється скінченна область, очікуваною є також особливість біля краю пластини. Беручи до уваги умову про рівність нулю напружень на краях пластини, отримуємо зменшення величини  $\sigma_{yy}$  від значень, що перевершують  $\sigma^\infty$ , до 0.

Отримання аналітичного розв'язання складається з декількох етапів. На першому етапі необхідно визначити довжину зони передруйнування  $l-l_0$  на продовженні тріщини, спираючись на розподіл напружень  $\sigma_{yy}(x)$ , отриманий за числового моделювання. Для її знаходження слід скористатися рівнянням (12), яке, як правило, розв'язують числово. На другому етапі, після знаходження довжини зони передруйнування, підставляємо значення її довжини у формулу (13) і, як наслідок, отримуємо розподіл напружень  $\sigma_{yy}(x)$  поза зоною передруйнування. На третьому етапі, застосовуючи формулу (14), знаходимо розкриття тріщини  $[v(x,0)]$  вздовж зони передруйнування. Останній етап – визначення розкриття тріщини в точці знаходження початкової її вершини  $\delta = [v(l_0,0)]$ . Зауважимо, що параметр  $n$  у всіх формулах варіювався і зрештою вибирався рівним 100, що означає розбиття відрізка зони передруйнування  $l-l_0$  на 100 частин.

Розкриття тріщини  $[v(x,0)]$  залежно від прикладеного навантаження  $\sigma^\infty$  має вигляд, зображений на рис.5.

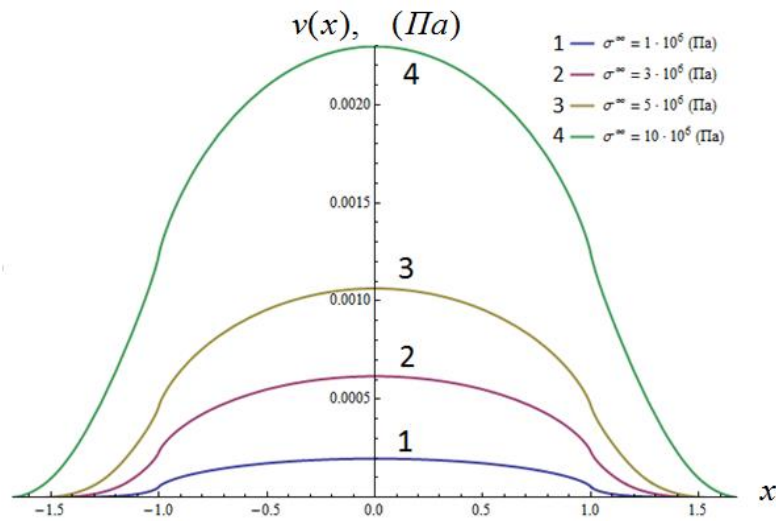


Рис. 5. Розкриття тріщини  $[v(x,0)]$

Тепер порівняємо результати аналітичного і числового розрахунків функції  $\sigma_{yy}(x)$ . Для цього побудуємо типові графіки для числового розв'язку і нанесемо на нього криву, що відповідає аналітичному за відповідного значення  $\sigma^\infty$  (рис.6,7).

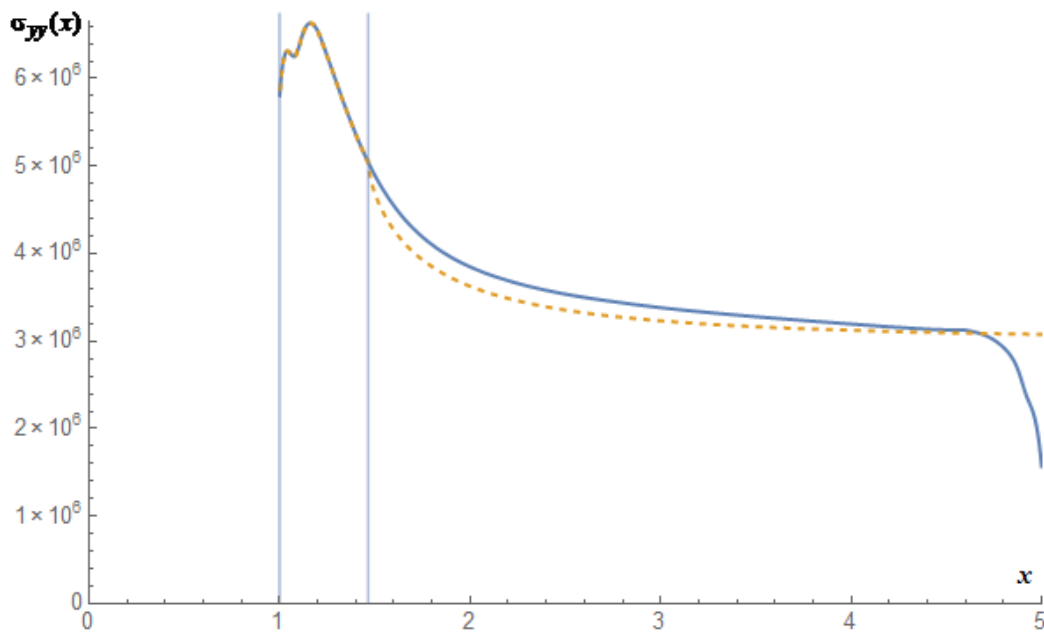


Рис. 6. Розподіл  $\sigma_{yy}(x)$  за  $\sigma^\infty = 3 \cdot 10^6 (Па)$ :  
 — числовий розв'язок; ----- аналітичний розв'язок



На рис. 7 добре видно, що точність аналітичного розв'язку спадає по мірі включення в розрахунок пластичних властивостей матеріалу. Якщо ж пластичні властивості виявляють себе не так сильно, то числовий розв'язок є достатньо близький до аналітичного (рис. 6). В той же час результати, зображені на рис. 7, також демонструють прийнятну узгодженість указаних розв'язків.

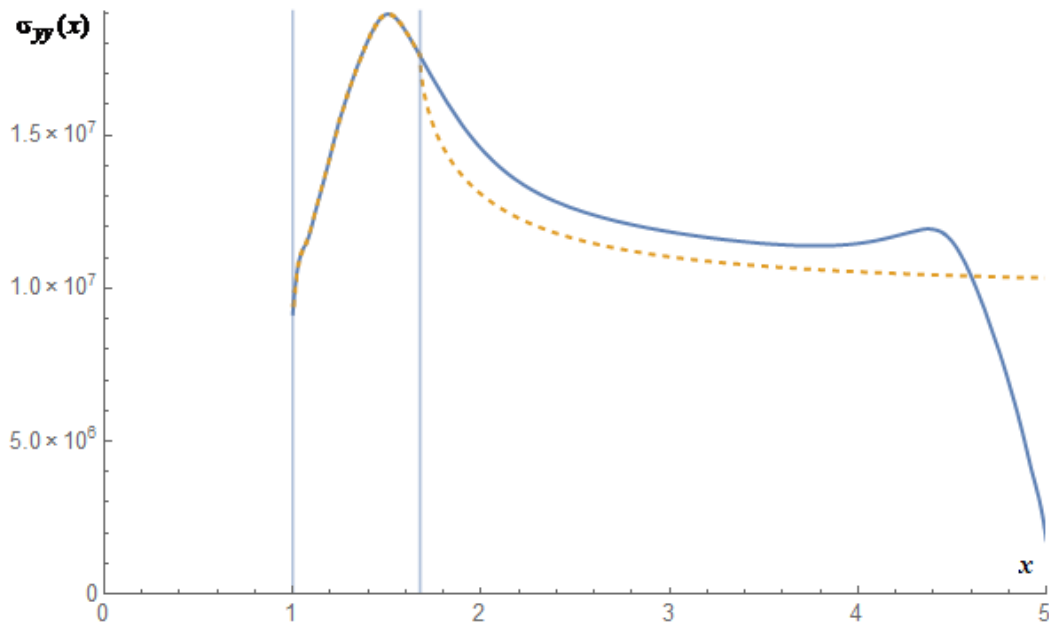


Рис. 7. Розподіл  $\sigma_{yy}(x)$  за  $\sigma^{\infty} = 1 \cdot 10^7$  (Па)

— числовий розв'язок; ----- аналітичний розв'язок

**Висновки.** Описаний у даній роботі метод дозволяє визначати довжину зони передруйнування, розподіл нормальних напружень на її продовженні, а також розкриття тріщини. Актуальним є знаходження величини розкриття тріщини у її початковій вершині, що може бути складовою деформаційного критерію руйнування в частині перевірки умови досягнення межового стану рівноваги. Викладений підхід, пов'язаний зі скінченно-елементним аналізом початкової задачі, можна застосовувати для побудови апроксимаційної функції для напружень у зоні передруйнування, яка залежить від механічних і геометричних властивостей композиту, а також для аналітичного аналізу без звернення до МСЕ.

### Бібліотечні посилання

1. **Волошко, О. І.** Побудова апроксимаційної функції в зоні передруйнування тріщини в адгезійному прошарку між двома ізотропними матеріалами [Текст] / О. І. Волошко, Ю. М. Лапуста, В. В. Лобода // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – Т. 54, №1. – С. 116–130.
2. **Леонов, М.Я.** Розвиток найдрібніших тріщин у твердому тілі [Текст] / М.Я. Леонов, В.В. Панасюк // Прикл. механіка. – 1959. – Т.5. – С. 391 – 401.
3. **Мусхелишвили, Н.И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости [Текст] / Н.И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
4. **Панасюк, В.В.** Предельное равновесие хрупких тел с трещинами [Текст] / В.В. Панасюк. – К.: Наук. думка, 1968. – 248 с.

5. **Dugdale, D.S.** Yielding of steel sheets containing slits [Text] / D.S. Dugdale // J. Mech. and Phys. Solids. – 1960. – Vol. 8, №2. – P. 100 – 104.

6. **Herrmann, K. P.** Interface crack with a contact zone in an isotropic bimaterial under thermomechanical loading [Text] / K. P. Herrmann, V.V.Loboda, I.V. Kharun // Theor. and Appl. Fract. Mech. – 2004. – 42. – P. 335 – 348.

7. **Loboda, V.** Limited permeable crack in an interlayer between piezoelectric materials with different zones of electrical saturation and mechanical yielding [Text] / V.Loboda, Y.Lapusta, A.Sheveleva // Int. J. Solids Struct. – 2010. – 44. – P. 5538–5553.

8. **Voloshko, O.** Analytical and numerical study of cohesive zones for a crack in an adhesive layer between identical isotropic materials[Text] / O. Voloshko, Y. Lapusta, V. Loboda // Eng. Fract. Mech. – 2010. – Vol.77. – P. 2577–2592.

*Надійшла до редколегії 01.07.2016*

УДК 515.2:519.6

**Ю.И.Николаенко<sup>1</sup>, С.В. Моисеенко<sup>2</sup>, О.А.Самойленко<sup>1</sup>**

*<sup>1</sup>Херсонский физико-технический лицей при ХНТУ и ДНУ*

*<sup>2</sup>Херсонский национальный технический университет*

## ПОЛНЫЕ БАЗИСЫ БИКУБИЧЕСКОГО КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА

Статья посвящена построению наиболее широкого семейства базисов бикубического квадратного конечного элемента и выделению из него квазигармонических базисов. Получены пятипараметрическое семейство полных базисов и трехпараметрическое семейство базисов бикубического конечного элемента, полных по отношению ко всем гармоническим полиномам до третьей степени включительно. Из трехпараметрического семейства выделено два квазигармонических базиса, которые с высокой точностью аппроксимируют гармонические функции. При построении базисных функций в виде бикубических полиномов были применены обязательные условия: функция в своем узле равна единице, в других – нулю, и к ним добавлено условие полноты, которое обеспечивает точную аппроксимацию линейных функций, а также учтена симметрия (геометрия) конечного элемента. В качестве дополнительной меры гармоничности базисных функций взята сумма квадратов отклонений значений лапласианов базисных функций от нуля. Для сравнения свойств рассмотренных базисов вычислены: относительная погрешность, среднеквадратическое отклонение, матрицы Грама этих базисов и числа обусловленности.

**Ключевые слова:** бикубический конечный элемент, квазигармонический базис, аппроксимация гармонических функций.

Статтю присвячено побудові найбільш широкої сім'ї базисів бікубічного квадратного скінченного елемента та виділенню з нього квазигармонічних базисів. Одержано п'ятипараметричну сім'ю повних базисів і трипараметричну сім'ю базисів бікубічного скінченного елемента, повних щодо всіх гармонічних поліномів до третього степеня включно. Из трипараметричної сім'ї виділено два квазигармонічні базиси, які дозволяють апроксимувати гармонічні функції з достатньо високим ступенем точності. Під час побудови базисних функцій у вигляді бікубічних поліномів було застосовано обов'язкові умови: функція у своєму вузлі дорівнює одиниці, в інших – нулю, і до них додано умову повноти, яка забезпечує точну апроксимацію лінійних функцій, а також враховано симетрію (геометрію) скінченного елемента. Як додаткову міру гармонічності базисних функцій було взято суму квадратів відхилень значень лапласіанів базисних функцій від нуля. Для порівняння властивостей розглянутих базисів обчислено: відносну похибку, середньоквадратичне відхилення, матриці Грама цих базисів і число обусовленості.

**Ключові слова:** бікубічний скінченний елемент, квазигармонічний базис, апроксимація гармонічних функцій.