

8. **Aminossadati, S. M.** Numerical simulation of ventilation air flow in underground mine workings [Text] /S. M. Aminossadati, K. Hooman // In 12th US/North American Mine Ventilation Symposium, 2008. – P. 253-259.

9. Multiscale modeling of transient flows from fire and ventilation in long tunnels [Text] / F. Colella, G. Rein, V. Verda, R. Borchiellini // Computers Fluids, 2011. – № 51(1). – P. 16-29.

10. A practical use of CFD for ventilation of underground works [Text] / I. Diego et al // Tunneling and Underground Space Technology, 2011. – № 26(1). – P. 189-200.

*Надійшла до редколегії 10.06.2015*

УДК 539.3

**Ю.А. Черняков, А. Є. Шевельова**

*Дніпропетровський національний університет ім. Олеса Гончара*

### **СМУГА ЛОКАЛІЗАЦІЇ ПЛАСТИЧНОЇ ДЕФОРМАЦІЇ З ЧАСТКОВИМ РОЗРИВОМ НА ІНТЕРФЕЙСІ МІЖ ДВОМА МАТЕРІАЛАМИ**

Досліджено смугу локалізації пластичної деформації в області поділу двох матеріалів за умови, що діаграма деформування міжматеріального прошарку має пік-«зуб», а також ділянку зміцнення. Зроблено припущення про наявність розриву в центральній частині смуги локалізації пластичної деформації. Сформульовано крайову задачу Діріхле для кусково-аналітичної функції, виписано її точний аналітичний розв'язок. Знайдено довжини смуг локалізації пластичної деформації, графічно проілюстровано стрибки переміщень у смугах локалізації та дотичного напруження на її продовженні для різних зовнішніх навантажень і різних механічних властивостей матеріалів.

**Ключові слова:** полоса локалізації пластичної деформації, кусково-аналітична функція, стрибки переміщень.

Исследована полоса локализации пластической деформации в области раздела двух материалов при условии, что диаграмма деформирования межматериальной прослойки имеет пик-«зуб», а также участок упрочнения. Предполагалось наличие трещины в центральной части полосы локализации пластической деформации. Сформулирована краевая задача Дирихле для кусочно-аналитической функции и записано ее точное аналитическое решение. Найдены длины полос локализации пластической деформации, приведена графическая иллюстрация скачка перемещений в полосе локализации и касательного напряжения на ее продолжении для различных внешних нагрузок и различных механических свойств материалов.

**Ключевые слова:** полоса локализации пластической деформации, кусочно-аналитическая функция, скачки перемещений.

A localization strip of plastic deformation between two materials assuming that the graph of intermaterial deformation has a peak-«tooth» and hardening part is investigated. A crack in the central part of the strip of plastic strain localization is assumed. Dirichlet problem for a piecewise-analytic function is formulated and solved exactly. The numerical results of the length of localization strip of plastic deformation, shear displacement jumps and shear stress for various external loads and mechanical properties of materials are presented.

**Keywords:** localization strip of plastic deformation, piecewise-analytic function, shear displacement jumps.

**Вступ.** Зазвичай пластична деформація тіл супроводжується розвитком ліній ковзання. За умови незначної зміни величини напружень в однорідному тілі лінії ковзання рівномірно розподіляються за його об'ємом. У разі ж неоднорідного поля

напружень із великим градієнтом з'являються ізольовані лінії ковзання, що займають незначний об'єм тіла порівняно з пружною частиною. Така ж ситуація може мати місце для кусково-однорідних тіл, навіть за розподілу напружень, близького до рівномірного.

Відповідно до [6] лінії ковзання можна трактувати як тонкі прошарки «перенапруження» матеріалу, які моделюються розрізами, поверхні яких взаємодіють за деяким законом. У ряді випадків такі сили взаємодії можуть бути визначені, завдяки чому пружно-пластична задача зводиться до деякої змішаної задачі математичної теорії пружності. Такі задачі називають також розривними задачами лінійної теорії пружності.

Розривні задачі лінійної теорії пружності, пов'язані з моделюванням смуг ковзання, розглянуто в [2]. У [4; 5] запропоновано оригінальну концепцію, у якій розглядають розрізи в пружних тілах (поверхні стрибків нормальних переміщень) як нетривіальні стани рівноваги фізично нелінійного пружного середовища. У [8] таку концепцію застосовано для дослідження смуг локалізації пластичної деформації для однорідного поля напружень в однорідному матеріалі, діаграма деформування якого в умовах жорсткого навантаження має пік-«зуб» [7]. Узагальнення цього підходу на випадок кусково-однорідних матеріалів здійснено в [9]. При цьому припускали, що смуги локалізації пластичної деформації в таких випадках спочатку виникають у прошарках, що забезпечують адгезію матеріальних компонент. Це пов'язано з тим, що зазначені міжматеріальні прошарки, зумовлені зварюванням або склеюванням різнорідних матеріалів, здебільшого – найслабкіші місця композитів.

У [8; 9] смуги локалізації пластичної деформації моделювалися розрізами, поверхні яких взаємодіяли між собою у всіх точках. Проте за деяких рівнів навантаження зв'язки між берегами смуг локалізації пластичної деформації можуть порушуватися в окремих точках і навіть на деяких ділянках зазначених смуг. У даній статті власне і досліджено смуги локалізації пластичної деформації, які «частково розірвалися» і є в області розділу двох матеріалів за умови, що діаграма деформування міжматеріального прошарку має пік-«зуб» [8; 9], а також ділянку зміцнення.

**Постановка задачі.** Розглянемо узагальнений плоский напружений стан нескінченної пластинки, що складається з двох спаяних півплощин  $y > 0$  та  $y < 0$  (рис. 1) із механічними характеристиками  $\mu_1, \kappa_1$  ( $y > 0$ ) і  $\mu_2, \kappa_2$  ( $y < 0$ ).

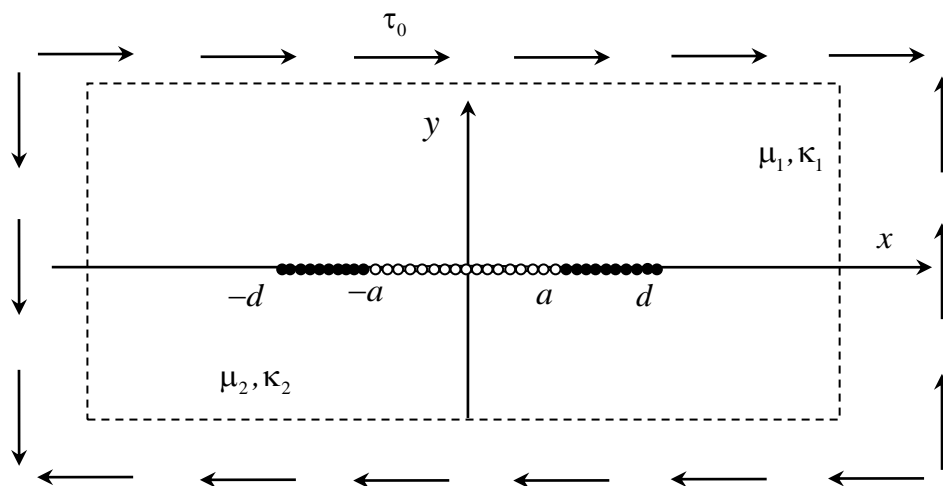


Рис. 1. Смуга локалізації пластичної деформації з зоною розриву між двома півплощинами в полі зсувного навантаження

Припускаємо, що на границі поділу матеріалів на відріжку  $(-d, d)$  виникла смуга локалізації пластичної деформації, на відріжку  $(-a, a)$  якої має місце порушення зв'язків між її берегами (рис. 1). Вважаємо також, що діаграма деформування міжматеріального прошарку має пік-«зуб» [8; 9], а також ділянку лінійного зміцнення. Смугою локалізації пластичної деформації моделюємо розрізом, на берегах якого діють навантаження, що замінюють зв'язки між берегами смуги. Тоді на відрізках  $(-b, -a)$  та  $(a, b)$  має місце лінійний закон, за яким навантаження змінюється від значення  $\tau_B$  (тимчасовий опір руйнуванню) до значення  $\tau_s^{low}$  (нижня межа плинності), на відрізках  $(-c, -b)$  та  $(b, c)$  діє зсувне навантаження  $\tau_s^{low}$ , на відрізках  $(-d, -c)$  та  $(c, d)$  – зсувне навантаження  $\tau_s^{up}$  (рис. 2).

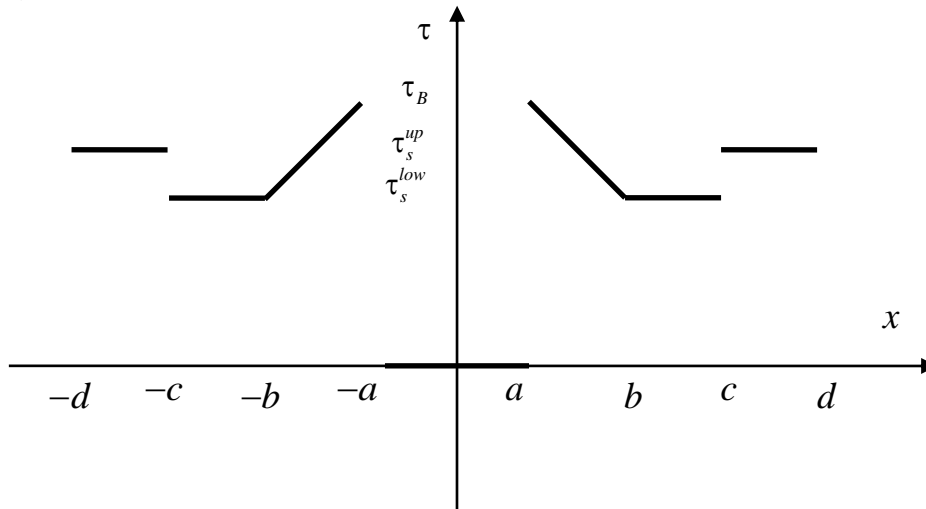


Рис. 2. Схема навантаження на проміжку  $[-d, d]$

Для побудови розв'язку задачі виключаємо однорідний напружений стан  $\sigma_{xx}(x, y) = \sigma_{yy}(x, y) = 0$ ,  $\sigma_{xy}(x, y) = \tau_0$ . Тоді отримаємо деякий доповнювальний (допоміжний) напружено-деформований стан, який зникає на нескінченності. На поверхні поділу матеріалів цей стан визначають такі граничні умови:

$$\sigma_{xy}^{(i)}(x, 0) = -\tau(x), \quad \langle u_2(x, 0) \rangle = 0, \quad -d < x < d, \quad (1)$$

де

$$\tau(x) = \begin{cases} \tau_0, & |x| < a, \\ \tau_0 - \tau_B - (\tau_s^{low} - \tau_B) \frac{x-a}{b-a}, & a < x < b, \\ \tau_0 - \tau_B + (\tau_s^{low} - \tau_B) \frac{x+a}{b-a}, & -b < x < -a, \\ \tau_0 - \tau_s^{low}, & b < |x| < c, \\ \tau_0 - \tau_s^{up}, & c < |x| < d. \end{cases} \quad (2)$$

**Аналітичне дослідження.** У [10] для двох скріплених пружних ізотропних півпросторів із дефектами в області розділу матеріалів за умови, що напружено-деформований стан не залежить від координати, співнаправленої з фронтом розрізу, наведено такі вирази для стрибків переміщень і напружень в області розділу матеріалів:

$$\sigma_{yy}^{(1)}(x,0) - i \sigma_{xy}^{(1)}(x,0) = g (F_1^+(x) + \gamma F_1^-(x)), \quad (3)$$

$$\langle u_1'(x) \rangle + i \langle u_2'(x) \rangle = F_1^+(x) - F_1^-(x), \quad (4)$$

де  $\langle u_i'(x) \rangle = \frac{\partial u_i^{(1)}(x,0)}{\partial x} - \frac{\partial u_i^{(2)}(x,0)}{\partial x}$ ,  $g = \frac{2\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2 \kappa_1}$ ,  $\gamma = \frac{\mu_1 + \mu_2 \kappa_1}{\mu_2 + \mu_1 \kappa_2}$ .

Функція  $F_1(z)$  аналітична на всій площині за винятком відрізка  $(-d, d)$ .

Задовольняючи за допомогою (3), (4) граничні умови (1)-(2), маємо

$$\text{Im}(F_1^+(x) + \gamma F_1^-(x)) = \frac{\tau(x)}{g}, \quad \text{Im}(F_1^+(x) - F_1^-(x)) = 0 \quad \text{для } -d < x < d.$$

Останні два співвідношення еквівалентні задачі Діріхле для кусково-аналітичної функції  $F_1(z)$ :

$$\text{Re}(i F_1^\pm(x)) = -\frac{\tau(x)}{g(1+\gamma)} \quad \text{для } -d < x < d \quad (5)$$

за умови на нескінченності

$$F_1(x)|_{x \rightarrow \infty} = 0. \quad (6)$$

За формулами Келдиша–Сєдова [1] обмежена на обох кінцях функція  $i F_1(z)$  має вигляд

$$i F_1(z) = -\frac{\sqrt{(z-d)(z+d)}}{2\pi i g(1+\gamma)} \int_{-d}^d \frac{\tau(t) dt}{(t-z)\sqrt{(t-b)(t+b)}} \quad (7)$$

за додаткової умови

$$-\frac{2}{g(1+\gamma)} \int_{-d}^d \frac{\tau(t) dt}{\sqrt{(t-d)(t+d)}} = 0. \quad (8)$$

Для функції  $\tau(x)$ , заданої в граничній умові (1), з (8) випливає

$$\int_{-d}^d \frac{\tau(t) dt}{\sqrt{(t-d)(t+d)}} = \left( \int_{-d}^{-c} + \int_c^d \right) \frac{(\tau_0 - \tau_s^{up}) dt}{\sqrt{t^2 - d^2}} + \left( \int_{-c}^{-b} + \int_b^c \right) \frac{(\tau_0 - \tau_s^{low}) dt}{\sqrt{t^2 - d^2}} + \int_{-a}^a \frac{\tau_0 dt}{\sqrt{t^2 - d^2}} + \left( \int_{-b}^{-a} + \int_a^b \right) \frac{\left( \tau_0 - \tau_B - (\tau_s^{low} - \tau_B) \frac{|t| - a}{b - a} \right) dt}{\sqrt{t^2 - d^2}} = 0.$$

Обчислюючи інтеграли, отримуємо перше рівняння для знаходження невідомих  $c$  та  $d$ :

$$(1-\alpha)\arcsin\frac{c}{d} + \frac{\pi}{2}(\beta-1) + \frac{b(\alpha-\lambda)}{b-a}\arcsin\frac{b}{d} + \\ + \frac{b\lambda-a\alpha}{b-a}\arcsin\frac{a}{d} + \frac{\alpha-\lambda}{b-a}\left(\sqrt{d^2-b^2}-\sqrt{d^2-a^2}\right) = 0, \quad (9)$$

де  $\alpha = \frac{\tau_s^{low}}{\tau_s^{up}}$ ,  $\beta = \frac{\tau_0}{\tau_s^{up}}$ ,  $\lambda = \frac{\tau_B}{\tau_s^{up}}$ .

**Поле напружень і стрибок переміщення.** На підставі формули (3) з урахуванням  $F_1^+(x) = F_1^-(x) = F_1(x)$  для  $|x| > d$  напруження на продовженні розрізу визначимо за формулою

$$\sigma_{yy}^{(1)}(x,0) - i\sigma_{xy}^{(1)}(x,0) = g(1+\gamma)F_1(x). \quad (10)$$

Використовуючи (7), після обчислення інтегралів, маємо

$$\sigma_{yy}^{(1)}(x,0) - i\sigma_{xy}^{(1)}(x,0) = \frac{1}{2\pi\sqrt{x^2-d^2}} \left\{ \pi(\tau_0 - \tau_s)(x - \sqrt{x^2-d^2}) + 2\tau_s \arcsin\frac{a}{d} + \right. \\ \left. + \tau_s\sqrt{x^2-d^2} \left( \arcsin\frac{d^2-ax}{d(x-a)} - \arcsin\frac{d^2+ax}{d(x+a)} \right) \right\}. \quad (11)$$

Похідні від зсуву (стрибка дотичних переміщень) берегів на основі формули (4) визначимо як

$$\langle u_1'(x) \rangle + i\langle u_2'(x) \rangle = F_1^+(x) - F_1^-(x). \quad (12)$$

За (4) та формулами Сохоцького–Племеля [3] маємо

$$\langle u_1'(x) \rangle + i\langle u_2'(x) \rangle = \frac{\sqrt{x^2-d^2}}{\pi g(1+\gamma)} \int_{-d}^d \frac{\tau(t)dt}{(t-x)\sqrt{t^2-d^2}}.$$

Тоді, обчислюючи інтеграл, отримуємо

$$\langle u_1'(x) \rangle = \frac{-1}{4\pi(1+\gamma)g} \left\{ (\tau_s^{up} - \tau_s^{low})(\Gamma(x,c,d) - \Gamma(x,-c,d)) - \right. \\ - \frac{(\tau_s^{low} - \tau_B)(x-b)}{b-a} \Gamma(x,b,d) - \frac{(\tau_s^{low} - \tau_B)(x+b)}{b-a} \Gamma(x,-b,d) + \\ \left. + \left( \tau_B + \frac{(\tau_s^{low} - \tau_B)(x-a)}{b-a} \right) \Gamma(x,a,d) - \left( \tau_B - \frac{(\tau_s^{low} - \tau_B)(x+a)}{b-a} \right) \Gamma(x,-a,d) \right\},$$

де  $\Gamma(x,t,d) = \ln \frac{d^2 - tx + \sqrt{(d^2-t^2)(d^2-x^2)}}{d^2 - tx - \sqrt{(d^2-t^2)(d^2-x^2)}}$ .

Виконуючи інтегрування, стрибок переміщення  $u_1(x, 0)$  з застосуванням [6] визначимо за формулою

$$\begin{aligned} \langle u_1(x) \rangle = & \frac{-1}{4\pi(1+\gamma)g} \left\{ (\tau_s^{up} - \tau_s^{low}) \left( (x-c)\Gamma(x, c, d) - (x+c)\Gamma(x, -c, d) \right) - \right. \\ & + \frac{(\tau_s^{low} - \tau_B)}{b-a} \left\langle -\frac{(x-b)^2}{2}\Gamma(x, b, d) - \frac{(x+b)^2}{2}\Gamma(x, -b, d) + \frac{(x-a)^2}{2}\Gamma(x, a, d) + \right. \\ & \left. \left. + \frac{(x+a)^2}{2}\Gamma(x, -a, d) \right\rangle + \tau_B \left( (x-a)\Gamma(x, a, d) - (x+a)\Gamma(x, -a, d) \right) \right\}. \quad (13) \end{aligned}$$

Друге рівняння для знаходження невідомих  $c$  та  $d$  впливає з умови  $\langle u_1(b) \rangle = \delta_{\max}$ , де  $\delta_{\max}$  – відоме значення.

$$\begin{aligned} \frac{-1}{4\pi(1+\gamma)g} \left\{ (\tau_s^{up} - \tau_s^{low}) \left( (b-c)\Gamma(b, c, d) - (b+c)\Gamma(b, -c, d) \right) + \right. \\ \left. + \tau_B \left( (b-a)\Gamma(b, a, d) - (b+a)\Gamma(b, -a, d) \right) + \right. \\ \left. + \frac{(\tau_s^{low} - \tau_B)}{b-a} \left\langle -4b^2 \ln \frac{d}{b} + \frac{(b-a)^2}{2}\Gamma(b, a, d) + \frac{(b+a)^2}{2}\Gamma(b, -a, d) \right\rangle \right\} = \delta_{\max}. \end{aligned}$$

**Результати числового аналізу.** Розглянуто сталь 1045 з  $E_1 = 1.7 \cdot 10^{11}$  Па,  $\nu_1 = 0.28$ ,  $\mu_1 = 6.64063 \cdot 10^{10}$  Па,  $\gamma_s = 0.0025$  (верхній матеріал) та іридій з  $E_2 = 5.28 \cdot 10^{11}$  Па,  $\nu_2 = 0.26$ ,  $\mu_2 = 2.09524 \cdot 10^{11}$  Па (нижній) та біматеріал, скомпонований із епоксиду з характеристиками  $\mu_1 = 1,12$  ГПа,  $\kappa_1 = 1,84$  (верхня півплощина) і скла з характеристиками  $\mu_2 = 29,92$  ГПа,  $\kappa_2 = 2,12$  (нижня). Розрив смуги локалізації пластичної деформації розташований на проміжку  $[-a, a]$ .

У табл. 1 наведено знайдені положення точок  $c$  та  $d$  за умови фіксованого положення точки  $a$  і різних положень точки  $b$ . Варіювались значення нижньої межі плинності прошарку  $\tau_s^{low}$  та дотичного напруження на нескінченності  $\tau_0$  (параметрів  $\alpha$  і  $\beta$ ) за значення верхньої межі плинності  $\tau_s^{up} = 1.66016 \cdot 10^8$  Па,  $\delta_{\max} = 1,5 \cdot 10^{-7}$  м,  $\tau_B = 3,3 \cdot 10^8$  Па. Нижня межа плинності  $\tau_s^{low} = \alpha \tau_s^{up}$ . Дотичне напруження на нескінченності задавали як  $\tau_0 = \beta \tau_s^{up}$ .

На рис. 3, 4 подано графіки відносного тангенціального зміщення берегів смуги локалізації пластичної деформації  $\langle u_1(x, 0) \rangle \cdot 10^6$  м на проміжку  $[-d, d]$  для сталі-іридію за  $a = 0,01$  м,  $\tau_B = 3.3 \cdot 10^8$  Па і  $\alpha = 0,1$ ,  $\beta = 0,5$  (рис. 3) та  $\alpha = 0,3$ ,  $\beta = 0,5$  (рис. 4). Крива I відповідає  $b = 0,01001$  м, II –  $b = 0,0101$  м, а III –  $b = 0,011$  м.

Положення точок  $c$  та  $d$  за  $a = 0,01$  м та  $a = 0,001$  м, різних положеннях точки  $b$  для сталі-іридію за  $\tau_B = 3.3 \cdot 10^8$  Па

$a$	$\alpha$	$\beta$	$b$	$c$	$d$	
0,01 (верхні рядки)	0,1	0,5	0,01001	0,025927 0,00257079	0,0347839 0,00345222	
			0,0101	0,0261511 0,00317010	0,0350048 0,00423294	
			0,011	0,0284795 0,00302486	0,0372437 0,00395176	
	0,001 (нижні рядки)	0,3	0,5	0,01001	0,0297534 0,0101366	0,0353699 0,0114647
				0,0101	0,0284649 0,010422	0,0338856 0,0117757
				0,011	0,0230771 0,01268	0,0272707 0,0142254
0,001 (нижні рядки)	0,8	0,9	0,01001	0,0707793 0,0106539	0,144897 0,0194473	
			0,0101	0,0711828 0,01123667	0,145042 0,020226	
			0,011	0,0491969 0,0153214	0,11205 0,025626	

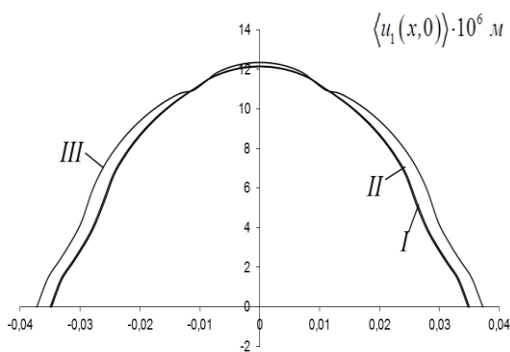


Рис. 3. Відносне тангенціальне зміщення берегів смуги локалізації пластичної деформації  $\langle u_1(x,0) \rangle \cdot 10^6$  м на проміжку  $[-d, d]$  для сталі-іридію за  $a = 0,01$  м,  $\tau_B = 3.3 \cdot 10^8$  Па,  $\alpha = 0,1$ ,  $\beta = 0,5$

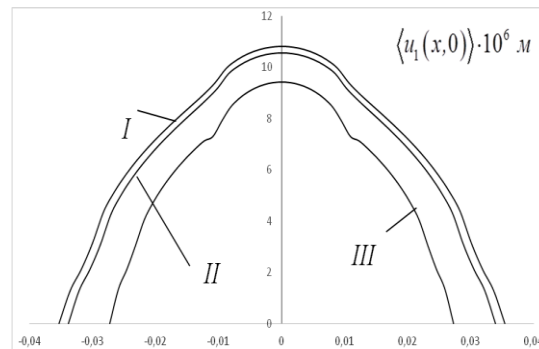


Рис. 4. Відносне тангенціальне зміщення берегів смуги локалізації пластичної деформації  $\langle u_1(x,0) \rangle \cdot 10^6$  м на проміжку  $[-d, d]$  для сталі-іридію за  $a = 0,01$  м,  $\tau_B = 3.3 \cdot 10^8$  Па,  $\alpha = 0,3$ ,  $\beta = 0,5$

За цими результатами визначено, що збільшення значення  $\alpha$  зумовлює більш суттєву залежність відносного тангенціального зміщення берегів смуги локалізації пластичної деформації в її «розірваній» частині від положення точки  $b$ . Крім того, очевидно, що для  $\alpha = 0,3$  незначне зростання  $b$  призводить до відчутного зменшення вказаного зміщення (рис. 4) у всіх точках проміжку  $[-d, d]$ .

**Висновки.** Розглянуто кусково-однорідний матеріал із адгезійним прошарком, діаграма деформування якого має пік-«зуб», а також ділянку зміцнення. Показано можливість існування нетривіальних рівноважних станів, пов'язаних із появою в такому прошарку смуги локалізації пластичних деформацій. Смуга локалізації пластичної деформації в області поділу двох матеріалів мала розрив у її центральній частині. Для різних зовнішніх навантажень і різних механічних властивостей матеріалів знайдено довжини смуг локалізації пластичних деформацій, графіки стрибків дотичного переміщення в цих смугах, а також дотичного напруження на їх продовженні.

#### Бібліографічні посилання

1. **Гахов, Ф.Д.** Краевые задачи [Текст] / Ф.Д. Гахов. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
2. **Леонов, М.Я.** О разрывных деформациях твердого тела [Текст] / М.Я. Леонов, Н.Ю. Швайко // ПМТФ. – 1961.– №2. – С. 96–103.
3. **Мухелишвили, Н.И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости [Текст] / Н.И. Мухелишвили. – М.: Наука, 1966. – 707с.
4. **Новожилов, В.В.** О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности [Текст] / В.В. Новожилов. // Прикл. математика и механика. – 1969. – Т. 33, Вып. 2. – С. 212–222.
5. **Новожилов, В.В.** К основам теории равновесных трещин в упругих телах [Текст] / В.В. Новожилов. // Прикл. математика и механика. – 1969. – Т. 33, Вып. 5. – С. 797–812.
6. **Панасюк, В.В.** Предельное равновесие хрупких тел с трещинами [Текст] / В.В. Панасюк. – К.: Наук. думка, 1968. – 248 с.
7. **Трефилов, В.И.** Деформационное упрочнение и разрушение поликристаллических металлов [Текст] / В.И. Трефилов, В.Ф. Моисеев, Э.П. Печковский и др. – К.: Наук. Думка, 1989. – 256 с.
8. **Черняков, Ю.А.** Локализация пластической деформации в форме ограниченной полосы разрыва перемещений [Текст] / Ю.А. Черняков, А.Г. Шевченко // Доп. НАН України. – 2013. – №11. – С. 61–66.
9. **Черняков, Ю.А.** Полоса локализации пластической деформации на интерфейсе между двумя материалами [Текст] / Ю.А. Черняков, А.Е. Шевелёва // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер.: Механіка. – 2014. – Т. 22, №5. – Вип. 18, Т. 1. – С. 138–146.
10. **Herrmann, K.P.** Interface crack with a contact zone in an isotropic bimaterial under thermomechanical loading [Text] / K.P. Herrmann, V.V. Loboda, I.V. Kharun // TAFM. – 2004. – Vol. 42, Iss. 3. – PP. 335–348.

*Надійшла до редколегії 14.05.2015*