

9. **Веселовский В. Б.** Решение задачи нестационарной теплопроводности для многослойных плоских тел с неидеальным тепловым контактом / В. Б. Веселовский // Прикладные вопросы аэродинамики летательных аппаратов. – Киев, 1984. – С. 140 – 144.

10. **Веселовский В. Б.** Математическое моделирование влияния полей различной физической природы на тепловые режимы элементов конструкций / В. Б. Веселовский // Техническая теплотехника. – 1993. – Вып. 1. – С. 114 – 117.

Надійшла до редколегії 16.10.13.

УДК 532.5

В.А. Катан

Днепропетровский национальный университет им. Олеса Гончара

УДАРНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ С НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ НАКЛОННОЙ ПЛАСТИНЫ, ПЛАВАЮЩЕЙ НА ЕЕ ПОВЕРХНОСТИ, ПРИ УДАРЕ С ВРАЩЕНИЕМ В УСЛОВИЯХ ОТРЫВА

Розглянута задача про ударну взаємодію із відривом нестисливої рідини та наклонної пластини, що плаває на її вільній поверхні за наявності обертання. Поставлена задача зводиться до задачі Келдиша-Седова. Отримано розв'язок у виді квадратур.

Ключові слова: удар по тілу, що плаває на поверхні рідини, задача Келдиша-Седова.

Рассмотрена задача об ударном взаимодействии с отрывом несжимаемой жидкости и наклонной пластины, плавающей на ее свободной поверхности при наличии вращения. Поставленная задача сводится к задаче Келдыша-Седова. Получено решение в виде квадратур.

Ключевые слова: удар по телу, плавающему на поверхности жидкости, задача Келдыша-Седова.

The problem of the impact of incompressible fluid and the sloping plate on free surface is considered. The solution is received as a result by the Keldish-Sedov's problem.

Keywords: impact of incompressible fluid and the solid of revolution on free surface, the Keldish-Sedov's problem.

Введение. Задачи об ударном безотрывном взаимодействии несжимаемой жидкости и твердого тела, плавающего на ее свободной поверхности, в классической постановке хорошо известны. Обзор и библиография по вопросам ударного взаимодействия жидкости и плавающих на ее поверхности твердых тел приведены в [1–3]. В [4] содержится постановка ударных задач в плоском приближении и для их решения используются методы теории функций комплексного переменного.

Пусть наклонная пластина длины b плавает под углом $\alpha\pi$ на свободной поверхности несжимаемой идеальной жидкости, находящейся в покое и занимающей нижнее полупространство. Ось Oy декартовой системы координат направлена по нормали к невозмущенной свободной поверхности жидкости внутри последней, а ось Ox совпадает со свободной поверхностью. Предполагается, что ударные импульсы действовали так, что после удара пластина имеет компоненты скорости вдоль осей Ox и Oy , а также угловую скорость ω_z вокруг оси, перпендикулярной плоскости Oxy . Возникшее в результате удара течение жидкости будет потенциаль-

ным и описывается комплексным потенциалом

$$w(z) = \varphi + i\psi, \quad z = x + iy,$$

где $\varphi(x, y)$ – потенциал течения, $\psi(x, y)$ – функция тока.

В результате удара пластинка приобретает скорость

$$\bar{V} = (U_0 - \omega_z y)\bar{i} + (V_0 + \omega_z x)\bar{j},$$

где U_0 – поступательная скорость вдоль оси Oy полюса, V_0 – поступательная скорость вдоль оси Ox полюса, ω_z – угловая скорость.

При этом, в результате удара может возникнуть зона отрыва течения жидкости от поверхности пластинки, положение которой заранее неизвестно.

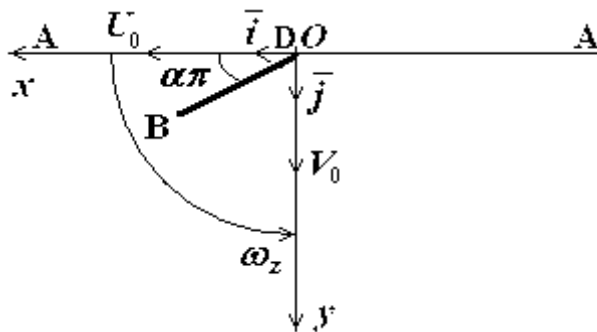


Рис. 1. Схема течения в физической плоскости

Для определения предположительного расположения зоны отрыва находится распределение скорости, нормальной к поверхности пластинки, и положение мгновенной оси вращения. Мгновенная ось вращения может разбить переднюю и заднюю стороны пластинки на две части, одна из которых будет иметь положительную нормальную скорость, а вторая – отрицательную. Зоны отрыва, по предположению, могут возникать на части пластинки с отрицательной нормалью скоростью, размеры и положение зон отрыва определяются в процессе решения задачи.

Выделим на пластинке переднюю сторону BE (рис. 2), вектор нормали к которой образует с положительным направлением оси Ox угол $\frac{\pi}{2} - \alpha\pi$. Единичный вектор нормали к ней имеет компоненты

$$\bar{n}_f = \sin \alpha\pi \bar{i} - \cos \alpha\pi \bar{j},$$

а единичный касательный вектор, который дополняет вектор нормали до правой системы $(\bar{\tau}_f, \bar{n}_f)$, равен

$$\bar{\tau}_f = -\cos \alpha\pi \bar{i} - \sin \alpha\pi \bar{j}.$$

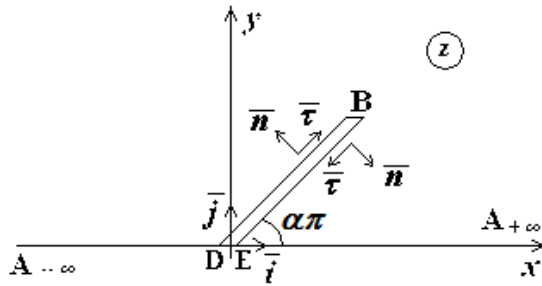


Рис. 2. Схема течения в комплексной плоскости z

Сторону BD назовем задней с соответствующими векторами внешней нормали и касательной

$$\bar{n}_r = -\sin \alpha\pi \bar{i} + \cos \alpha\pi \bar{j} \text{ и } \bar{\tau}_r = \cos \alpha\pi \bar{i} + \sin \alpha\pi \bar{j}.$$

Рассмотрим распределение нормальной составляющей скорости на передней и задней сторонах пластинки. Соответственно имеем:

$$V_{n_f} = \bar{V}_0 \cdot \bar{n}_f = U_0 \sin \alpha\pi - V_0 \cos \alpha\pi - \omega_z(x \cos \alpha\pi + y \sin \alpha\pi)$$

и

$$V_{n_r} = \bar{V}_0 \cdot \bar{n}_r = -U_0 \sin \alpha\pi + V_0 \cos \alpha\pi + \omega_z(x \cos \alpha\pi + y \sin \alpha\pi) = -V_{n_f}.$$

Мгновенная ось находится в точке $P(x_p, y_p)$, где

$$x_p = -\frac{V_0}{\omega_z} \text{ и } y_p = \frac{U_0}{\omega_z},$$

и будет принадлежать пластинке (или ее продолжению), если

$$\frac{y_p}{x_p} = \operatorname{tg} \alpha\pi \Rightarrow \frac{U_0}{V_0} = -\operatorname{tg} \alpha\pi \Rightarrow \frac{V_0}{U_0} = \operatorname{ctg}(-\alpha\pi) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\pi\right),$$

то есть, когда вектор поступательной скорости перпендикулярен пластинке. Отметим, что при этом в точке P нормальная составляющая скорости равна нулю и при переходе через эту точку она меняет свой знак на противоположный. Следовательно, если точка P не принадлежит пластинке, то нормальная составляющая имеет определенный знак, например, $V_{n_f} > 0$ (и $V_{n_r} < 0$). В этом случае на задней стороне пластинки размещаем предполагаемую зону отрыва. В случае $V_{n_f} < 0$ ($V_{n_r} > 0$) стороны меняются ролями.

Если мгновенная ось (точка P) принадлежит пластинке, то нормальная составляющая скорости на передней стороне, и, соответственно, на задней, меняет свой знак и возможно образование двух зон отрыва, расположенных на задней и передней сторонах в тех частях, где нормальная составляющая скорости отрицательна. Если мгновенная ось лежит на продолжении пластинки, то знак нормальной со-

ставляющей скорости не меняется и предполагаемая зона отрыва находится только на одной из сторон.

Таким образом, предположительно зону отрыва располагаем на той части стороны пластинки, где $V_n < 0$.

Запишем скорость пластинки после удара, выбрав в качестве полюса мгновенный центр вращения, тогда

$$\bar{V} = -\omega_z(y - y_p)\bar{i} + \omega_z(x - x_p)\bar{j}.$$

После введения местной полярной системы координат (ρ, θ) с центром в мгновенном центре вращения будем иметь

$$\bar{V} = \omega_z \rho (-\sin \theta \bar{i} + \cos \theta \bar{j}).$$

Представим нормальную составляющую скорости в виде

$$V_{n_f} = -\omega_z \rho (\sin \theta \cos \alpha \pi + \cos \theta \sin \alpha \pi) = -|\bar{V}| K \bar{\rho} \sin(\theta + \alpha \pi),$$

где $|\bar{V}| = \sqrt{U_0^2 + V_0^2}$ – модуль поступательной скорости; $K = \frac{\omega_z b}{|\bar{V}|}$ – кинематический параметр; $\bar{\rho} = \frac{\rho}{b}$ – относительный полярный радиус точек пластины.

Условие возможного отрыва приводит к следующему

$$V_{n_f} < 0 \Rightarrow V_{n_f} > 0 \Rightarrow -|\bar{V}| K \bar{\rho} \sin(\theta + \alpha \pi) > 0 \Rightarrow K \sin(\theta + \alpha \pi) < 0.$$

Тогда при $K > 0$ получим

$$\sin(\theta + \alpha \pi) < 0,$$

или

$$-\pi < \theta + \alpha \pi < 0 \Rightarrow -\pi - \alpha \pi < \theta < -\alpha \pi.$$

Последнее неравенство определяет возможную зону отрыва на задней стороне пластинки.

Аналогично, при $K < 0$ имеем:

$$-\alpha \pi < \theta < \pi - \alpha \pi.$$

Отметим следующие соотношения для координат мгновенного центра вращения

$$\bar{x}_p = -\frac{1}{K} \sin \gamma = \frac{1}{K} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right), \quad \bar{y}_p = \frac{1}{K} \cos \gamma = \frac{1}{K} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right),$$

где γ – угол наклона вектора поступательной скорости; $\bar{x} = \frac{x}{b}$, $\bar{y} = \frac{y}{b}$.

На рис. 3 в относительных декартовых координатах показано возможное расположение зоны отрыва.

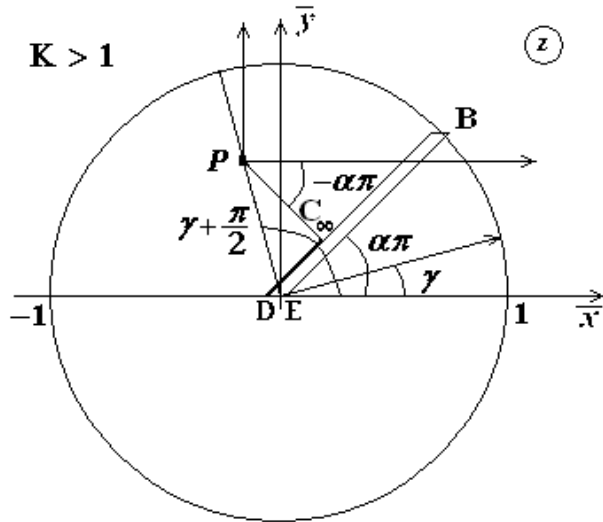


Рис. 3. Возможное расположение зоны отрыва течения

Точка $B(\cos \alpha\pi, \sin \alpha\pi)$ представляет край пластины и расположена на единичной окружности. Под углом γ показано направление поступательной скорости сразу после удара. В точке $P\left(\frac{1}{K} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right), \frac{1}{K} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right)\right)$ находится мгновенный центр вращения, с которым связана декартова и полярная системы координат. В этой системе координат отложена максимально возможная граница области, где выполнено условие возможного отрыва. Точка C_∞ ограничивает область возможной отрывной зоны, и ее координаты находим как координаты точки пересечения линии пластины и луча, ограничивающего область возможного отрыва, а именно, $C_\infty\left(\frac{\cos(\alpha\pi + \gamma)\sin 2\alpha\pi}{2K}, \frac{\cos(\alpha\pi + \gamma)\sin^2 \alpha\pi}{K}\right)$. Сама же отрывная зона ограничена точкой С, которая располагается между точками D и C_∞ . Положения точки С определяется после решения поставленной задачи.

Следовательно, схема течения имеет вид показанный на рисунке.

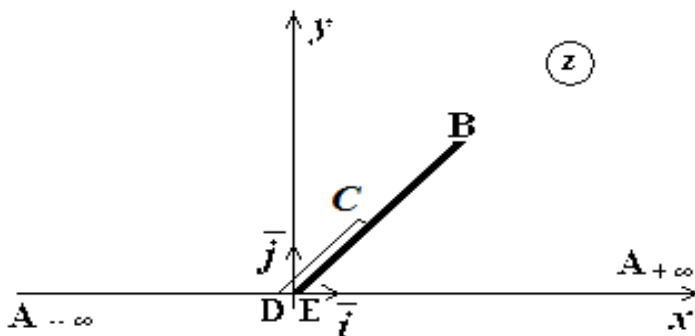


Рис. 4. Область решения задачи с учетом зоны отрыва течения

В предположении о наличии отрыва условие безотрывности обтекания распространяется только на участке контура CBE, причем положение точки C заранее неизвестно, и имеет вид

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{CBE} = \bar{V} \cdot \bar{n}.$$

На участке CB имеем

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{CB} = \bar{V} \cdot \bar{n}_r = V_{nr} = -U_0 \sin \alpha \pi + V_0 \cos \alpha \pi + \omega_z (x \cos \alpha \pi + y \sin \alpha \pi),$$

а на участке BE

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{BE} = \bar{V} \cdot \bar{n}_f = V_{nf} = U_0 \sin \alpha \pi - V_0 \cos \alpha \pi - \omega_z (x \cos \alpha \pi + y \sin \alpha \pi).$$

На свободной границе – оси Ox и участке отрыва CD имеем в качестве условия равенство нулю импульсного давления, что приводит к условию

$$\varphi = 0.$$

Следовательно, имеем смешанную задачу для гармонической функции – потенциала скоростей φ .

Введем координату s вдоль контура пластинки, отсчитывая ее от точки E. На передней стороне пластинке BE имеют место соотношения

$$dx = ds \cdot \cos \alpha \pi \text{ и } dy = ds \cdot \sin \alpha \pi,$$

а на задней стороне пластинке BC

$$dx = -ds \cdot \cos \alpha \pi \text{ и } dy = -ds \cdot \sin \alpha \pi.$$

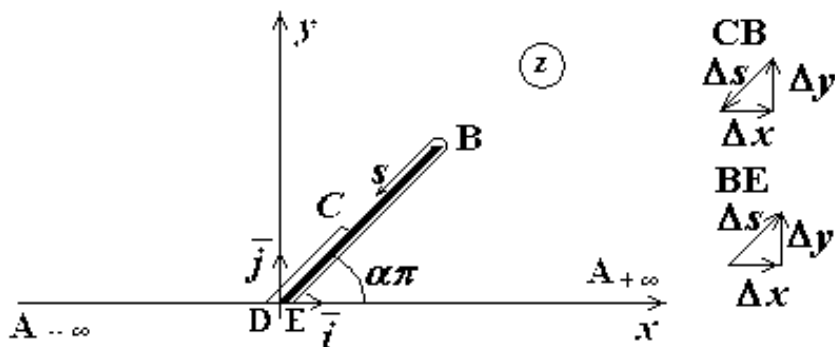


Рис. 5. Введение координаты s

Учитывая связь между производными потенциала скорости и функции тока и выражая из вышеприведенных соотношений тригонометрические функции угла α , граничные условия на поверхности в области безотрывного обтекания на участке СВ имеем

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial s} \right|_{CB} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{CB} = U_0 \frac{dy}{ds} - V_0 \frac{dx}{ds} - \omega_z \left(x \frac{dx}{ds} + y \frac{dy}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \left(U_0 y - V_0 x - \frac{\omega_z}{2} (x^2 + y^2) \right),$$

а на участке ВЕ получим

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial s} \right|_{BE} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{BE} = U_0 \frac{dy}{ds} - V_0 \frac{dx}{ds} - \omega_z \left(x \frac{dx}{ds} + y \frac{dy}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \left(U_0 y - V_0 x - \frac{\omega_z}{2} (x^2 + y^2) \right),$$

откуда, с точностью до несущественной константы, имеем

$$\psi = U_0 y - V_0 x - \frac{\omega_z}{2} (x^2 + y^2).$$

Перейдем в комплексную плоскость xOy $z = x + iy$ и введем функцию

$$\chi = -i w = \psi - i \varphi,$$

для которой получим задачу Келдыша-Седова [5]. На границе CBE задана ее действительная часть

$$\operatorname{Re} \chi|_{CBE} = U_0 y - V_0 x - \frac{\omega_z}{2} (x^2 + y^2),$$

а на границах $A_{-\infty}D$, DC , $EA_{+\infty}$ известна ее мнимая часть, а именно,

$$\operatorname{Im} \chi|_{A_{-\infty}B} = 0, \operatorname{Im} \chi|_{BC} = 0, \operatorname{Im} \chi|_{EA_{+\infty}} = 0.$$

Область течения $A_{-\infty}DCBEA_{+\infty}$ представляет собой обобщенный четырехугольник с вершиной A в бесконечно удаленной точке и углом, равным $-\pi$. В вершине E угол равен $\alpha\pi$, в вершине D угол $\pi - \alpha\pi$, а в вершине B , соответственно, 2π . В точке C , где меняется характер граничных условий, угол равен π .

Отображение верхней полуплоскости комплексной переменной $t = \xi + i\eta$ на данную область течения построим с помощью интеграла Кристоффеля – Шварца, а именно: функция

$$z = C \int_{t_0}^t (t - a_1)^{-2} (t - a_2)^{-\alpha} (t - a_3)^1 (t - a_4)^{\alpha-1} dt + C_1,$$

где C , C_1 , t_0 , a_1 , a_2 , a_3 , a_4 – некоторые константы, отображает верхнюю полуплоскость переменной t на обобщенный четырехугольник $A_{-\infty}DCBEA_{+\infty}$, при этом выполняются следующие соответствия.

Согласно основной теореме Римана три точки на плоскости t можно выбрать произвольно:

$$a_1 = -\infty, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = d.$$

При этом величину d удобно не задавать, а определять так, чтобы в плоскости t образы точек D' и E' были связаны зависимостью

$$h = d \frac{1-\alpha}{\alpha}.$$

Таблица 1

Соответствие точек плоскостей z и t

Точка	Плоскость z	Угол α_k	Плоскость t
$A_{-\infty}$	$-\infty$	$-\pi$	$-\infty$
D	0	$\pi - \alpha\pi$	$-h$
C	$ce^{i\alpha\pi}$	π	$-q$
B	$be^{i\alpha\pi}$	2π	0
E	0	$\alpha\pi$	d
$A_{+\infty}$	$+\infty$	$-\pi$	$+\infty$

Следовательно, искомое отображение имеет вид

$$z = C \int_0^t \left(t + d \frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{-\alpha} t(t-d)^{\alpha-1} dt + C_1.$$

Преобразуем подынтегральную функцию

$$f(t) = \left(t + d \frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{-\alpha} t(t-d)^{\alpha-1} = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{1-\alpha} \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{\alpha}{1-\alpha} t + d \right)^{1-\alpha} (t-d)^\alpha \right],$$

Откуда получим

$$\begin{aligned} z &= C \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{1-\alpha} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} t + d \right)^{1-\alpha} (t-d)^\alpha \Big|_0^t + C_1 = \\ &= C \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{1-\alpha} \left[\left(\frac{\alpha}{1-\alpha} t + d \right)^{1-\alpha} (t-d)^\alpha - d(-1)^\alpha \right] + C_1, \end{aligned}$$

но $(-1)^\alpha = e^{\alpha \ln(-1)} = e^{i\alpha\pi}$, т.е.

$$z = C \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{1-\alpha} \left[\left(\frac{\alpha}{1-\alpha} t + d \right)^{1-\alpha} (t-d)^\alpha - d e^{i\alpha\pi} \right] + C_1,$$

Начальная точка интегрирования здесь была выбрана равная нулю, а именно,

$$t_0 = 0,$$

что привело к следующему значению для константы

$$C_1 = b(\cos \alpha\pi + i \sin \alpha\pi) = b e^{i\alpha\pi}.$$

Следовательно, искомое отображение имеет вид

$$z = C \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{1-\alpha} \left[\left(\frac{\alpha}{1-\alpha} t + d \right)^{1-\alpha} (t-d)^\alpha - d e^{i\alpha\pi} \right] + b e^{i\alpha\pi},$$

При $t = d$ получим

$$0 = -C \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{1-\alpha} d e^{i\alpha\pi} + b e^{i\alpha\pi} \Rightarrow C d = b \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{1-\alpha}.$$

Тогда

$$z = \frac{b}{d} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{1-\alpha} \left(t + \frac{1-\alpha}{\alpha} d \right)^{1-\alpha} (t-d)^\alpha.$$

Если перейти к безразмерным координатам $\bar{t} = \frac{t}{d}$ (или положить $d = 1$, что равносильно предыдущему преобразованию), то приходим к наиболее простому виду

$$z = b \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{1-\alpha} \left(\bar{t} + \frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{1-\alpha} (\bar{t}-1)^\alpha.$$

В дальнейшем символ безразмерности переменной t будем опускать.

Связь между координатами точки C и ее прообраза есть

$$c \cdot e^{i\alpha\pi} = b \left(-\frac{\alpha}{1-\alpha} q + 1 \right)^{1-\alpha} (-q-1)^\alpha \Rightarrow c = b \left(1 - q \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{1-\alpha} (q+1)^\alpha.$$

Ветвь функции $z = b\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} \left(t + \frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{1-\alpha} (t-1)^\alpha$ выбираем так, чтобы на отрезке $E'A'_{+\infty}$, где $t = \xi + i0$ и $\xi \geq 1$, она совпадала с функцией действительного переменного $z = b\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} \left(\xi + \frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{1-\alpha} (\xi-1)^\alpha$ и вдоль отрезка $\left[-\frac{1-\alpha}{\alpha}, 1\right]$ сделан разрез.

При переходе с отрезка $E'A'_{+\infty}$ на верхний берег разреза по отрезку $D'E'$ аргумент θ_1 получает приращение равное π , а аргумент θ_2 – нулевое приращение (рис.6), поэтому

$$\begin{aligned} z &= b\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} \left(\xi + \frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{1-\alpha} (\xi-1)^\alpha = b\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} (\rho_2 e^{i\theta_2})^{1-\alpha} (\rho_1 e^{i(\theta_1+\pi)})^\alpha = \\ &= e^{i\alpha\pi} b\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} \left(\xi + \frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{1-\alpha} (1-\xi)^\alpha. \end{aligned}$$

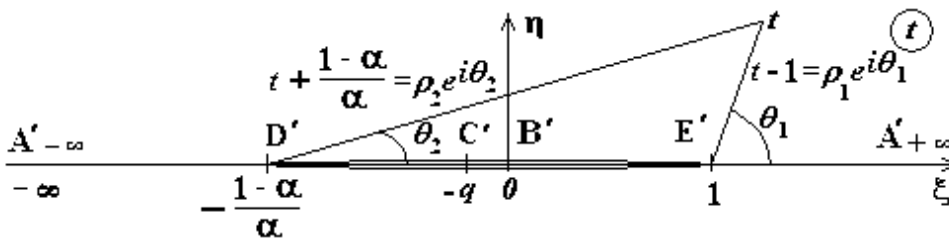


Рис. 6. Выбор однозначной ветви функции отображения на отрезке $D'E'$

При переходе с отрезка $E'A'_{+\infty}$ на нижний берег разреза по отрезку $D'E'$ аргумент θ_1 получит приращение равное $-\pi$, а аргумент θ_2 получит нулевое приращение, поэтому

$$\begin{aligned} z &= b\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} \left(\xi + \frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{1-\alpha} (\xi-1)^\alpha = b\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} (\rho_2 e^{i\theta_2})^{1-\alpha} (\rho_1 e^{i(\theta_1-\pi)})^\alpha = \\ &= e^{-i\alpha\pi} b\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} \left(\xi + \frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{1-\alpha} (1-\xi)^\alpha. \end{aligned}$$

Тогда при переходе с отрезка $D'E'$ на отрезок $A'_{-\infty}D'$ аргумент θ_1 получает нулевое приращение, а аргумент θ_2 приращение, равное π (рис. 7), так что

$$z = b \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{1-\alpha} \left(\xi + \frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{1-\alpha} (\xi - 1)^\alpha = b \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{1-\alpha} (\rho_2 e^{i(\theta_2 + \pi)})^{1-\alpha} (\rho_1 e^{i\theta_1})^\alpha =$$

$$= e^{i\pi} b \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{1-\alpha} \left(\left| \xi + \frac{1-\alpha}{\alpha} \right| \right)^{1-\alpha} (1 - \xi)^\alpha = -b \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{1-\alpha} \left(\left| \xi + \frac{1-\alpha}{\alpha} \right| \right)^{1-\alpha} (1 - \xi)^\alpha.$$

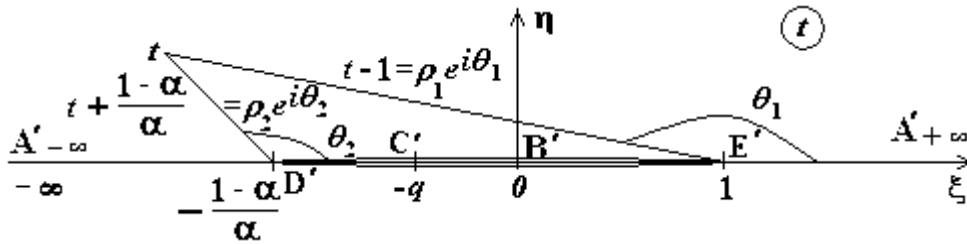


Рис. 7. Выбор однозначной ветви функции отображения на отрезке $A'_{-\infty}D'$

Следовательно, функция, описывающая соответствие границ из плоскости t в плоскость z , имеет вид

$$z = \begin{cases} -b \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{1-\alpha} \left(\left| \xi + \frac{1-\alpha}{\alpha} \right| \right)^{1-\alpha} (1 - \xi)^\alpha, & \xi \in \left(-\infty, -\frac{1-\alpha}{\alpha} \right], \\ e^{i\alpha\pi} b \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{1-\alpha} \left(\xi + \frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{1-\alpha} (1 - \xi)^\alpha, & \xi \in \left[-\frac{1-\alpha}{\alpha}, 1 \right], \\ b \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{1-\alpha} \left(\xi + \frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{1-\alpha} (\xi - 1)^\alpha, & \xi \in [1, +\infty). \end{cases}$$

Тогда граничные условия задачи Келдыша – Седова для функции χ принимают вид

$$\text{Im } \chi|_{A'_{-\infty}D'} = 0, \text{Im } \chi|_{D'C'} = 0, \text{Im } \chi|_{E'A'_{+\infty}} = 0$$

и

$$\text{Re } \chi|_{C'B'E'} = b \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{1-\alpha} \left(\xi + \frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{1-\alpha} (1 - \xi)^\alpha (U_0 \sin \alpha\pi - V_0 \cos \alpha\pi) -$$

$$- \frac{\omega_z b^2}{2} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{2(1-\alpha)} \left(\xi + \frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{2(1-\alpha)} (1 - \xi)^{2\alpha}.$$

Решение задачи Келдыша-Седова. Далее, следуя Мусхелишвили [5], составим функцию граничных условий

$$h(\xi) = \begin{cases} f(\xi), & \xi \in D', \\ ig(\xi), & \xi \in D'', \end{cases}$$

где

$$f(\xi) = b \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{1-\alpha} \left(\xi + \frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{1-\alpha} (1-\xi)^\alpha (U_0 \sin \alpha\pi - V_0 \cos \alpha\pi) - \\ - \frac{\omega_z b^2}{2} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{2(1-\alpha)} \left(\xi + \frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{2(1-\alpha)} (1-\xi)^{2\alpha}, \xi \in [-q, 1] \quad (D').$$

и

$$g(\xi) = 0, \quad \xi \in (-\infty, -q) \cup (1, +\infty) \quad (D'').$$

Данная постановка содержит только один отрезок с известной вещественной частью $D'C'$ и два полубесконечных промежутка с известной мнимой частью, т.е. параметры задачи равны

$$a_1 = -q \text{ и } b_1 = 1.$$

Будем искать решение поставленной задачи в классе функций, ограниченных в граничных точках промежутка $C'E'$, т.е. в точках $-q$ и 1 . Каноническое решение выделенного класса имеет вид

$$Z(t) = \sqrt{R(t)},$$

где

$$R(t) = (t - a_1)(t - b_1) = (t + q)(t - 1).$$

Ветвь $\sqrt{R(t)}$ принимает на оси t положительные значения при $\xi > 1$, при этом вдоль отрезка $\xi \in [-q, 1]$ (D') сделан разрез.

Одно из частных решений $\Psi(t)$ поставленной задачи Келдыша – Седова, определяется формулой

$$\Psi(t) = \frac{1}{\pi i} \sqrt{(t+q)(t-1)} \int_L Z^{-1}(\xi) \frac{h(\xi)}{\xi-t} d\xi,$$

где L – действительная ось плоскости t . Следовательно, решение задачи сводится к вычислению интеграла

$$I(t) = \int_L Z^{-1}(\xi) \frac{h(\xi)}{\xi-t} d\xi = \int_{D'} Z^{-1}(\xi) \frac{h(\xi)}{\xi-t} d\xi + \int_{D''} Z^{-1}(\xi) \frac{h(\xi)}{\xi-t} d\xi = \\ = \int_{D'} Z^{-1}(\xi) \frac{f(\xi)}{\xi-t} d\xi + \int_{D''} Z^{-1}(\xi) \frac{ig(\xi)}{\xi-t} d\xi.$$

Учитывая выражение для функций $f(\xi)$ и $g(\xi)$, приходим к выражению

$$I(t) = -i \int_{-q}^1 \frac{1}{\sqrt{(\xi+q)(1-\xi)}} \frac{f(\xi)}{\xi-t} d\xi.$$

Представим интеграл в виде

$$I(t) = -i \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{1-\alpha} J(t),$$

где

$$J(t) = b(U_0 \sin \alpha\pi - V_0 \cos \alpha\pi) \int_{-q}^1 \frac{\left(\xi + \frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{1-\alpha} (1-\xi)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{(\xi+q)^{\frac{1}{2}} (\xi-t)} d\xi - \\ - \frac{\omega_z b^2}{2} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{1-\alpha} \int_{-q}^1 \frac{\left(\xi + \frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{2(1-\alpha)} (1-\xi)^{2\alpha-\frac{1}{2}}}{(\xi+q)^{\frac{1}{2}} (\xi-t)} d\xi.$$

Выводы. Получено точное решение задачи об ударе наклонной пластинки с вращением по поверхности несжимаемой жидкости. Полученные соотношения позволяют сделать заключение о возникновении зоны отрыва при ударном взаимодействии несжимаемой жидкости и горизонтальной пластины, плавающей на ее поверхности.

Библиографические ссылки

1. Гуревич М.И. Теория течений со свободными границами / М.И. Гуревич // Итоги науки. Гидромеханика, 1971. – Т. 5. – С. 32 – 114.
2. Григолюк Э.И. Взаимодействие упругих конструкций с жидкостью (удар и погружение) / Э.И. Григолюк, А.Г. Горшков. – Л., 1976. – 200 с.
3. Логвинович Г.В. Гидродинамика течений со свободными границами / Г.В. Логвинович. – Киев, 1969. – 216 с.
4. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики / Л.И. Седов. – М., 1980. – 448 с.
5. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мухелишвили. – М., 1968. – 512 с.

Надійшла до редколегії 22.10.13.